VI Congreso Galego de Estatística e Investigación de Operacións
Vigo 5-7 de Novembro de 2003

COMPORTAMENTO TRANSEUNTE DO SISTEMA M|G|∞ COM ORIGEM DOS TEMPOS NO INÍCIO DE UM PERÍODO DE OCUPAÇÃO – MÉDIA E VARIÂNCIA

Manuel Alberto Martins Ferreira
Departamento de Métodos Quantitativos
Instituto Superior de Ciências do Trabalho e da Empresa

RESUMO

Determinamos, neste trabalho, as probabilidades transeuntes para o sistema de fila de espera M|G|∞ , sendo a origem dos tempos um instante em que se inicia um período de ocupação. Pomos uma incidencia especial no estudo da média e da variância, como funções do tempo, da distribuição de probabilidade obtida. Joga aqui um papel importante a função de taxa de falhas do serviço. Mostramos que este sistema de fila de espera permite modelar situações de doença e de desemprego, sendo os resultados obtidos adequados ao seu estudo probabilístico.

Palavras - chave: M|G|∞ , função de taxa de falhas, doença, desemprego
Classificação AMS: 60K35

1. INTRODUÇÃO

Designa-se por M|G|∞ um sistema de fila de espera a que os clientes chegam de acordo com um processo de Poisson de taxa λ , recebem um serviço que é uma variável aleatória positiva com função de distribuição $G(.)$ e média α e, quando chegam, a cada um é imediatamente disponibilizado um servidor para o atender. O serviço de cada cliente é independente dos dos outros clientes do processo de chegadas. A intensidade de tráfego é dada por $\rho = \lambda\alpha$.

Sendo $N(t)$ o número de servidores ocupados (ou, de modo equivalente, o número de clientes a serem servidos) no instante t , num sistema M|G|∞, de acordo com (Takács, 1962) tem-se, pondo $p_{0n}(t) = P[N(t) = n | N(0) = 0]$, $n = 0,1,2,...,$ que

$$p_{0n}(t) = \frac{\left(\lambda\int_0^t [1 - G(v)]dv\right)^n}{n!} e^{-\lambda\int_0^t [1-G(v)]dv}, \quad n = 0,1,2,... \qquad (1.1).$$

Portanto, a distribuição transeúnte, sendo a origem dos tempos um instante em que o sitema está vazio, é uma distribuição de Poisson de média $\lambda\int_0^t [1 - G(v)]dv$.

A distribuição estacionária é dada pela distribuição limite tendo-se

$$\lim_{t\to\infty} p_{0n}(t) = \frac{\rho^n}{n!} e^{-\rho}, \quad n = 1,2,... \qquad (1.2).$$

Este sistema de fila de espera , como qualquer outro, tem uma sucessão de períodos de ocupação e de períodos de desocupação. Um período de ocupação inicia-se quando um cliente chega ao sistema encontrando-o vazio.

Seja $p_{1'n} = P[N(t) = n | N(0) = 1']$, $n = 0,1,2,...$, significando $N(0) = 1'$ que a origem dos tempos se considera um instante em que o cliente chega ao sistema, passando o número de clientes a serem servidos de 0 para 1 (ou seja: inicia-se um período de ocupação).

No instante $t \geq 0$ pode acontecer que:

- O cliente que chegou no instante inicial tenha abandonado o sistema, com probabilidade $G(t)$, ou que continue a ser servido, com probabilidade $1 - G(t)$;
- Os outros servidores, que estavam desocupados na origem dos tempos, estejam desocupados ou ocupados com 1, 2, ... clientes, com probabilidades dadas por $p_{0n}(t)$, $n = 0,1,2,...$.

Os dois subsistemas, o do cliente cliente inicial e o dos servidores inicialmente desocupados, são independentes pelo que se tem

$$p_{1'0}(t) = p_{00}(t)G(t)$$

$$p_{1'n}(t) = p_{0n}(t)G(t) + p_{0n-1}(t)(1 - G(t)), \quad n = 1,2,... \qquad (1.3).$$

Verifica-se facilmente que

$$\lim_{t \to \infty} p_{1'n}(t) = \frac{\rho^n}{n!} e^{-\rho}, \quad n = 0,1,2,... \qquad (1.4).$$

Designando por $\mu(1',t)$ e $\mu(0,t)$ os valores médios das distribuições dadas por (1.3) e (1.1), respectivamente tem-se que

$$\mu(1',t) = \sum_{n=1}^{\infty} n p_{1'n}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n G(t) p_{00}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} n p_{0n-1}(t)(1 - G(t)) =$$

$= G(t)\mu(0,t) + (1 - G(t)) \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) p_{0j}(t) = \mu(0,t) + (1 - G(t))$, ou seja

$$\mu(1',t) = 1 - G(t) + \lambda \int_0^t [1 - G(v)] dv \qquad (1.5).$$

Como

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 p_{0n}(t) = G(t) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 p_{0n}(t) + (1 - G(t)) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 p_{0n-1}(t) =$$

$$= G(t)\left(\mu^2(0,t) + \mu(0,t)\right) + (1 - G(t))\left(\mu^2(0,t) + 3\mu(0,t) + 1\right) =$$

$= \mu^2(0,t) + (3 - 2G(t))\mu(0,t) + 1 - G(t)$, designando por $V(1',t)$ a variância asociada à distribuição dada por (1.3), obtém-se

$$V(1',t) = \mu(0,t) + G(t) - G^2(t) \qquad (1.6).$$

O nosso objectivo é estudar $\mu(1',t)$ e $V(1',t)$ com funções do tempo. Veremos que, no seu comportamento como funções do tempo, desempenha um papel importante a função de taxa de falhas do serviço dada por, ver por exemplo (Ross, 1983),

$$h(t) = \frac{g(t)}{1 - G(t)} \qquad (1.7)$$

em que $g(.)$ é a densidade asociada a $G(.)$.

2. APLICAÇÃO EM PROBLEMAS DE DOENÇA E DE DESEMPREGO

Os sistemas M|G|∞ são muito aplicados na modelação de situações práticas. Podem, a propósito, consultar-se os trabalhos de (Carillo, 1991), (Ferreira, 1988), (Hershey, Weiss e Morris, 1981) e (Kelly, 1979). As que vamos apresentar aqui, para além do seu interesse óbvio, têm a particularidade de os resultados apresentados na sequência serem especialmente adequados ao seu estudo probabilístico.

DOENÇA

Neste caso os clientes são as pessoas que têm uma certa doença. Chegam ao sistema quando adoecem e o seu tempo de serviço é o tempo durante o qual estão doentes.

Um período de ocupação inicia-se quando aparece a primeira pessoa com essa doença (pode ser o início de uma epidemia).

A taxa de falhas do serviço é a taxa a que os doentes se curam.

DESEMPREGO

Agora os clientes são os desempregados. Chegam ao sistema quando ficam desempregados e o seu tempo de serviço é o tempo durante o qual estão desempregados.

Um período de desocupação é um período de pleno emprego. Um período de ocupação inicia-se quando aparece o primeiro desempregado.

A taxa de falhas do serviço é a taxa a que os desempregados arranjam emprego.

Em ambos os casos se pode aplicar (1.3). Há que verificar se as pessoas adoecem ou ficam desempregradas de acordo com um processo de Poisson. É mais natural que esta hipótese falhe no caso de desemprego. O início das epidemias ou dos períodos de desemprego consegue-se determinar, actualmente, com bastante rigor.

Os resultados que vamos apresentar podem ajudar a prever a evolução das situações.

Finalmente há que ajustar as distribuições adequadas aos tempos de doença e de desemprego. Neste último caso será mais natural fazê-lo por ramos de actividade.

3. ESTUDO DE $\mu(1',t)$ COMO FUNÇÃO DO TEMPO

Proposição 1:

Se $G(t)<1$, $t>0$, contínua e diferenciável e

$$h(t)\leq\lambda,\quad t>0 \tag{3.1}$$

$\mu(1',t)$ é não decrescente.

Demonstração:

Basta notar, tendo em conta (1.5), que $\frac{d}{dt}\mu(1',t)=(1-G(t))(\lambda-h(t))$.

Observação:

- Se a taxa a que os serviços acabam for inferior ou igual à taxa de chegadas dos clientes $\mu(1',t)$ é não decrescente;

- Para o sistema M|M|∞ (3.1) é equivalente a

$$\rho \geq 1 \qquad (3.2).$$

- $\lim_{t\to\infty} \mu(1',t) = \rho.$

Fazendo $h(t) - \lambda = \beta(t)$, $\beta(.)$ qualquer, obtemos

$$G(t) = 1 - (1 - G(0))e^{-\lambda t - \int_0^t \beta(u)du}, t \geq 0, \frac{\int_0^t \beta(u)du}{t} \geq -\lambda \qquad (3.3).$$

Temos então a

Proposição 2:

Se $\beta = 0$

$$G(t) = 1 - (1 - G(0))e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0 \qquad (3.4)$$

e $\mu(1',t) = 1 - G(0) = \rho, \quad t \geq 0.$

Vejamos agora expressões de $\mu(1',t)$ para algumas distribuições de serviço particulares:

- Determinística de valor α

$$\mu(1',t) = \begin{cases} 1 + \lambda t, t < \alpha \\ \rho, t \geq \alpha \end{cases} \qquad (3.5),$$

- Exponencial

$$\mu(1',t) = \rho + (1 - \rho)e^{-\frac{t}{\alpha}} \qquad (3.6),$$

- $G(t) = 1 - \dfrac{\left(1 - e^{-\rho}\right)(\lambda + \beta)}{\lambda e^{-\rho}\left(e^{(\lambda+\beta)t} - 1\right) + \lambda}, t \geq 0, -\lambda \leq \beta \leq \dfrac{\lambda}{e^{\rho} - 1}$ (Para esta colecção de distribuições de serviço o período de ocupação tem distribuição exponencial com uma concentração de probabilidade na origem. Ver (Ferreira, 1998)).

$$\mu(1't) = \frac{\left(1 - e^{-\rho}\right)(\lambda + \beta)}{\lambda e^{-\rho}\left(e^{(\lambda+\beta)t} - 1\right) + \lambda} + \rho - \log\left(1 + \left(e^{\rho} - 1\right)e^{-(\lambda+\beta)t}\right) \qquad (3.7).$$

4. ESTUDO DE $V(1',t)$ COMO FUNÇÃO DO TEMPO

Proposição 3:

Se $G(t) < 1$, $t > 0$, contínua e difenciável e

$$h(t) \geq -\frac{\lambda}{1-2G(t)} \qquad (4.1)$$

$V(1',t)$ é não decrescente.

Demonstração:

Basta notar, tendo em conta (1.6), que $\frac{d}{dt}V(1',t) = \lambda(1-G(t)) + g(t) - 2G(t)g(t) = \lambda(1-G(t)) + g(t)(1-2G(t)) =$
$= (1-G(t))(h(t)(1-2G(t)) + \lambda)$.

Observação:

- Obviamente $1-2G(t) < 0 \Leftrightarrow G(t) > \frac{1}{2}, t > 0$.
- $\lim_{t\to\infty} V(1',t) = \rho$.

Fazendo $h(t) + \frac{\lambda}{1-2G(t)} = 0$ obtemos a

Proposição 4:

Se $G(.)$ for definida implícitamente como

$$\frac{1-G(t)}{1-G(0)} e^{2(G(t)-G(0))} = e^{-\lambda t}, t \geq 0 \qquad (4.2)$$

$V(1',t) = \rho, t \geq 0$.

Observação:

- A densidade asociada a (4.2) é dada por
$$g(t) = -\frac{\lambda e^{-\lambda t}(1-G(0))}{(1-2G(t))e^{2(G(t)-G(0))}} \qquad (4.3).$$
- A partir de (4.3), designando por S a variável aleatória que lhe está associada, mostra-se fácilmente que, com $G(0) > \frac{1}{2}$,
$$\frac{(1-G(0))n!e^{-2(1-G(0))}}{\lambda^n} \leq \mathrm{E}\left[S^n\right] \leq \frac{(1-G(0))n!}{(2G(0)-1)\lambda^n}, n = 1,2,... \qquad (4.4).$$

Vejamos agora expressões de $V(1',t)$ para algumas distribuições de serviço particulares:

- Determinística de valor α
$$V(1',t) = \begin{cases} \lambda t, t < \alpha \\ \rho, t \geq \alpha \end{cases} \qquad (4.5),$$
- Exponencial

$$V(1',t)=\rho\left(1-e^{-t/\alpha}\right)+e^{-\frac{t}{\lambda}}+e^{-\frac{2t}{\alpha}} \qquad (4.6),$$

- $$G(t)=1-\frac{\left(1-e^{-\rho}\right)(\lambda+\beta)}{\lambda e^{-\rho}\left(e^{(\lambda+\beta)t}-1\right)+\lambda},t\geq 0,-\lambda\leq\beta\leq\frac{\lambda}{e^{\rho}-1}$$

$$V(1',t)=\rho-\log\left(1+\left(e^{\rho}-1\right)e^{-(\lambda+\beta)t}\right)+\frac{\left(1-e^{-\rho}\right)(\lambda+\beta)}{\lambda e^{-\rho}\left(e^{(\lambda+\beta)t}-1\right)+\lambda}+$$

$$+\left(\frac{\left(1-e^{-\rho}\right)(\lambda+\beta)}{\lambda e^{-\rho}\left(e^{(\lambda+\beta)t}-1\right)+\lambda}\right)^2 \qquad (4.7).$$

5. CONCLUSÕES

Com um raciocínio probabilístico simples, determinámos as probabilidades transeuntes para o sistema M|G|∞ , sendo a origem dos tempos um instante em que se inicia um período de ocupação. Basta condicionar à duração do serviço do primeiro cliente a chegar ao sistema.

Foi possível estudar o comportamento de $\mu(1',t)$ e $V(1',t)$, como funções do tempo, desempenhando aquí um papel importante a função de taxa de falhas do serviço.

Mostrámos que este sistema sistema permite modelar situações de doença e de desemprego, sendo as dificuldades de aplicação prática as usuais quando se aplicam modelos teóricos a situações reais.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CARRILO, M.J. (1991), **"Extensions of Palm's Theorem: A Review"**. Management Science. Vol. 37. N.º 6. 739-744.

FERREIRA, M.A.M. (1988), **"Redes de Filas de Espera"**,Dissertação de Mestrado apresentada no IST.

FERREIRA, M.A.M. (1998), **"Aplicação da Equação de Ricatti ao Estudo do Período de Ocupação do Sistema M|G|∞"**. Revista de Estatística. Vol. 1. 1.º Quadrimestre. INE. 23-28.

HERSHEY, J.C., WEISS, E.N. e MORRIS, A.C. (1981), **"A Stochastic Service Network Model With Application to Hospital Facilities"**. O.R. 29.

KELLY, F.P. (1979), **"Reversibility and Stochastic Networks"**. New York. John Wiley and Sons.

ROSS, S. (1983), **"Stochastic Processes"**. Wiley. New York.

TAKÁCS, L. (1992), **"An Introduction to Queueing Theory"**, Oxford University Press. New York.