

NEGOCIANDO A ESTRUCTURA COALICIONAL

Juan Vidal Puga¹

¹Departamento de Estatística e Investigación Operativa
Universidade de Vigo

RESUMO

Neste artigo, estudiamos situacións nas que un conxunto de axentes ou xogadores están divididos en distintos grupos (estructura coalicional). Supoñamos que os axentes poden decidir deixa-lo grupo ó que pertencen e irse por libre. Imos estudar as estruturas coalicionais que aparecen en equilibrio.

Palabras e frases chave: valor de Shapley, valor de Owen, xogos cooperativos, estrutura coalicional.

Clasificación AMS: 91A10, 91A12.

1. INTRODUCCIÓN

Un xogo describe unha situación conflictiva entre un número de axentes ou xogadores. Inda que os xogadores poidan ter intereses independentes, é frecuente que poidan beneficiarse dunha hipotética cooperación entre eles. Neste sentido, os xogos poden ser cooperativos ou non cooperativos.

En xogos non cooperativos, as regras (estratexias dispoñibles para cada un dos xogadores, orden no que moven, información acerca de movementos anteriores, pagos ó final do xogo, etc.) están rigurosamente especificadas, e os xogadores actúan de forma que maximizan o seu pago final. Unha solución de este tipo de xogos é por exemplo o equilibrio de Nash, no que a estratexia dos xogadores é tal que ningún xogador gana desviándose.

Un clásico exemplo é o seguinte, coñecido como dilema do prisioneiro. Temos dous xogadores A e B. O xogador A escolle unha fila da seguinte matriz, e (simultaneamente) o xogador B escolle unha columna. O número da esquerda é o pago ó xogador A, e o número da dereita é o pago ó xogador B.

$$\begin{bmatrix} (3, 3) & (0, 6) \\ (6, 0) & (1, 1) \end{bmatrix}.$$

O único equilibrio de Nash de este xogo é que o xogador A escolle segunda fila e o xogador B escolle segunda columna. Así, o valor do xogo é $(1, 1)$. Mais información sobre o dilema do prisioneiro pódese atopar por exemplo en Heylighen (1995).

En xogos cooperativos, suponse que os xogadores dispoñen de mecanismos (por exemplo, un contrato) para coordina-las súas estratexias e aumentar o seu pago final agregado. Así, un xogo cooperativo está especificado mediante unha función (función característica) que asigna a cada posible coalición de xogadores o pago que poden acadar por eles mesmos sen a axuda dos demais xogadores. Se os xogadores A e B do exemplo anterior tiveran

mecanismos para acordar xogar coordinadamente, a función característica resultante tería a seguinte forma:

$$\begin{aligned}v(\emptyset) &= 0 \\v(A) &= 1 \\v(B) &= 1 \\v(AB) &= 6.\end{aligned}$$

O valor de Shapley (Shapley, 1953) é unha solución que suxire un reparto de pagos en xogos cooperativos. Este valor é simétrico (xogadores simétricos reciben o mesmo) e eficiente (os xogadores reparten o máximo valor que poden acadar por se mesmos). Polo tanto, o valor de Shapley do xogo anterior é (3, 3).

Vexamos outro exemplo con tres xogadores $\{1, 2, 3\}$. Estes xogadores poden repartirse 1 euro a condición de que todos eles estén de acordo con este reparto. Polo tanto, chamaremos a este xogo o xogo de unanimidade. A función característica é:

$$\begin{aligned}v(\emptyset) &= 0 \\v(\{1\}) &= v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0 \\v(\{1, 2\}) &= v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = 0 \\v(\{1, 2, 3\}) &= 1.\end{aligned}$$

O valor de Shapley de este xogo é, por suposto, $1/3$ para cada xogador.

Sen embargo, son frecuentes as situacións nas cales os axentes están agrupados en dous ou máis coalicións *a priori*. O valor de Owen (Owen, 1977) pódese utilizar nestas situacións. Baixo as premisas de Owen, cada coalición actúa coma se fora un único xogador, obtendo o seu valor de Shapley e redistribuíndoo entre os seus membros.

Unha das consecuencias deste procedemento é a desvantaxe de pertencer a unha coalición dada. Un exemplo desta desvantaxe pódese apreciar no xogo de unanimidade con 3 xogadores. Se dous xogadores actúan coma un só, ó negociar co terceiro xogador temos un xogo de unanimidade con 2 xogadores. Polo tanto, o valor de Shapley suxire $1/2$ euros para cada un. Polo tanto, os dous xogadores asociados obteñen un pago total de $1/2$ por $2/3$ que obterían de presentarse individualmente.

Neste artigo, imos supoñer que os xogadores teñen a opción de deixa-la coalición á que pertencen nunha etapa previa. Despois de esta etapa, o valor do xogo coa (posiblemente modificada) estrutura coalicional repártese segundo o valor de Owen. Temos así un xogo non cooperativo a partir dun xogo cooperativo.

Hart e Kurz (1983) propoñen tamén un mecanismo onde os xogadores simultaneamente escollen a coalición á que queren pertencer. Aumann e Myerson (1988) permiten que os xogadores decidan se establecen unha coalición entre eles. A diferenza de estes artigos, neste traballo consideramos que as coalicións xa están exósenamente dadas. A negociación será en torno a manter estas coalicións.

En particular, estudiamos o caso de unha única gran coalición.

2. NOTACIÓNS

Definimos un *xogo cooperativo* como un par (N, v) con un conxunto finito de *xogadores* $N = \{1, 2, \dots, n\}$ e unha *función característica* $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ con $v(\emptyset) = 0$.

Dada unha *coalición* $T \subset N$, definimos o *xogo de unanimidade* (N, u_T) con *soporte* T como o xogo cooperativo dado por

$$u_T(S) = \begin{cases} 1 & \text{se } T \subset S \\ 0 & \text{noutro caso.} \end{cases}$$

Dado v , existe $(\lambda_T)_{T \subset N}$ con $\lambda_T \in \mathbb{R}$ para todo $T \subset N$ tal que

$$v(S) = \sum_{T \subset N} \lambda_T u_T(S)$$

para todo $S \subset N$.

Unha *estructura coalicional* sobre N é unha partición do conxunto de xogadores $P = \{S_1, \dots, S_p\}$. O *xogo cociente* de v sobre P é o xogo v/P definido a partir de v cando as coalicións actúan como xogadores individuais. Polo tanto:

$$(v/P)(B) = \sum_{S_q \in B} v(S_q)$$

para todo $B \subset P$.

Denotamos por $CTU(N)$ o conxunto de xogos (N, v, P) sobre N con estrutura coalicional.

Consideraremos o valor de Owen como unha solución do xogo. Sexa Π o conxunto de tódalas permutacións dos elementos de N . Dicimos que $\pi \in \Pi$ é *compatible* con P se os membros da mesma coalición están xuntos. Denotamos por $\Pi_P \subset \Pi$ o conxunto de tódalas permutacións compatibles con P . Isto é, $\pi \in \Pi_P$ se e solo se verifica:

$$\forall i, j \in S_q \in P, \forall k \in N \quad \pi(i) < \pi(k) < \pi(j) \implies k \in S_q.$$

Dado $\pi \in \Pi$, definimos

$$Pr(i, \pi) := \{j \in N : \pi(j) < \pi(i)\}$$

como o conxunto de *predecesores* de i con respecto a π .

O *valor de Owen* é unha aplicación $\Phi : CTU(N) \rightarrow \mathbb{R}^N$ definida como sigue:

$$\Phi_i(P) = \frac{1}{|\Pi_P|} \sum_{\pi \in \Pi_P} [v(Pr(i, \pi) \cup \{i\}) - v(Pr(i, \pi))].$$

Como estamos máis interesados en estudar un xogo fixo e unha estrutura coalicional variable, usamos o término $\Phi(P)$ en lugar do máis longo $\Phi(N, v, P)$.

Unha caracterización do valor de Owen é presentado por Owen (1977) como sigue. O valor de owen é a única función $\Phi : CTU(N) \rightarrow \mathbb{R}^N$ verificando os seguintes axiomas:

1. Eficiencia: $\sum_{i \in N} \Phi_i(P) = v(N)$ para todo $(N, v, P) \in CTU(N)$.

2. Simetría en cada unión:

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}), \forall S \subset N \setminus \{i, j\} \implies \Phi_i(P) = \Phi_j(P)$$

para todo $i, j \in S_q \in P, i \neq j$.

3. Simetría no xogo cociente:

$$(v/P)(B \cup \{S_q\}) = (v/P)(B \cup \{S_r\}), \forall B \subset P \setminus \{S_q, S_r\} \implies \sum_{i \in S_q} \Phi_i(P) = \sum_{k \in S_r} \Phi_k(P)$$

para todo $S_q, S_r \in P, S_q \neq S_r$.

4. Xogador nulo:

$$v(S \cup \{i\}) = v(S), \forall S \subset N \setminus \{i\} \implies \Phi_i(P) = 0$$

para todo $i \in N$.

5. Aditividade:

$$\Phi(N, v + w, P) = \Phi(N, v, P) + \Phi(N, w, P)$$

para todo $(N, v, P), (N, w, P) \in CTU(N)$; sendo $v+w$ o xogo definido por $(v + w)(S) = v(S) + w(S)$ para todo $S \subset N$.

3. O XOGO NON COOPERATIVO

No noso xogo non cooperativo, a estratexia de cada xogador consiste en dúas alternativas: deixar a súa coalición ou non. Dada unha estrutura coalicional P , baixo calquera conxunto de estratexias, aparece unha nova estrutura coalicional. Definimos $\gamma : N \rightarrow 2^N$ como unha función que asigna a cada $i \in N$ un estado, 0 ou 1, que determina se o xogador i decide deixala súa coalición (valor 0) ou permanecer nela (valor 1). Chamamos a γ una *configuración de estratexias*. Denotamos por P_γ a estrutura coalicional resultante. Isto é:

$$S'_q \in P_\gamma \iff \left\{ \begin{array}{l} \exists S_q \in P : S'_q = \{i \in S_q : \gamma(i) = 1\} \\ \text{ou} \\ S'_q = \{i\} \text{ e } \gamma(i) = 0 \end{array} \right\}$$

O pago final para os xogadores é dado polo valor de Owen baixo esta estrutura coalicional $\Phi(P_\gamma)$.

Por exemplo, no xogo de unanimidade con tres xogadores $\{1, 2, 3\}$ e estrutura coalicional $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$, o xogador 3 é un xogador pasivo, xa que é o único xogador na súa coalición. O xogo en forma matricial entre os xogadores 1 e 2 ven dado por

$$\begin{bmatrix} (1/3, 1/3) & (1/3, 1/3) \\ (1/3, 1/3) & (1/4, 1/4) \end{bmatrix}.$$

Dada una configuración de estratexias γ , dicimos que P_γ *deriva* de P , e é unha *estructura coalicional derivada*. Dicimos que dúas funcións γ e γ' son *adxacentes* a través de $i \in N$, e denotámolo por $\gamma \sim_i \gamma'$, se $\gamma(j) = \gamma'(j)$ para todo $j \in N \setminus \{i\}$ e $\gamma(i) \neq \gamma'(i)$. Dicimos entón que i é o *enlace* entre γ e γ' . Dicimos que γ e γ' son *adxacentes*, e denotámolo por $\gamma \sim \gamma'$, se existe un enlace $i \in N$ tal que $\gamma \sim_i \gamma'$. Dúas estruturas coalicionais derivadas P_γ e $P_{\gamma'}$ son *adxacentes* a través de i se as súas respectivas funcións γ e γ' son *adxacentes* a través de i . Ademais, P_γ e $P_{\gamma'}$ son *adxacentes* se existe un enlace i tal que P_γ e $P_{\gamma'}$ son *adxacentes* a través de i . Denotamos esto por $P_\gamma \sim_i P_{\gamma'}$ e $P_\gamma \sim P_{\gamma'}$, respectivamente.

Nótese que dúas estruturas coalicionais adxacentes derivadas poden ser iguais. Por exemplo, sexa $N = \{1, 2\}$, $P = \{N\}$, $\gamma(i) = 0 \forall i$, $\gamma'(1) = 0$, $\gamma'(2) = 1$. Entón, $P_\gamma \sim P_{\gamma'}$ e $P_\gamma = P_{\gamma'} = \{\{1\}, \{2\}\}$.

Buscamos estruturas coalicionais que sexan estables no sentido de que ningún xogador $i \in N$ poida mellorar o seu pago final cambiando o seu valor $\gamma(i)$. Sen embargo, sempre existe un equilibrio como este: Dado $\gamma(i) = 0$ para todo $i \in N$, ningún xogador pode mellorar o seu pago final, xa que a estrutura coalicional resultante non varía. Polo tanto, faremos unha modificación no noso equilibrio para evitar este tipo de equilibrio trivial.

Facemos a seguinte restricción sobre as estruturas coalicionais γ : Nunha estrutura coalicional derivada, debe existir al menos un xogador por coalición que escolle permanecer a el. Isto é, unha configuración estratéxica $\gamma : N \rightarrow 2^N$ é *admisible* para P se, para cada $S_q \in P$, existe como mínimo un xogador $i \in S_q$ tal que $\gamma(i) = 1$. Denotamos por Γ_P o conxunto de funcións γ admisibles para P .

Nótese que a configuración estratéxica γ' no exemplo anterior non é admisible para P . Con esta restricción, podemos asegurar que dúas estruturas coalicionais adxacentes son diferentes.

Chamamos un *camión* sobre P a unha lista ordeada de estruturas coalicionais $\mathfrak{S} = \{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ admisibles para P tal que $\gamma_{l-1} \sim \gamma_l$ para $l = 1, \dots, m$. Se $\gamma_m = \gamma_0$, dicimos que $\mathfrak{S}$ é un *camión pechado*. Sexa $\{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ o conxunto de enlaces entre as estruturas coalicionais. Isto é, $\gamma \sim_{i_l} \gamma_l$ para $l = 1, \dots, m$. Sexa $\{P_0, P_1, \dots, P_m\}$ a estrutura coalicional derivada de $\mathfrak{S}$. Isto é, $P_l = P_{\gamma_l}$ para $l = 0, 1, \dots, m$.

Chamamos o *gradiente* de $\mathfrak{S}$ á cantidade:

$$\nabla(\mathfrak{S}) = \sum_{l=1}^m [\phi_{i_l}(P_l) - \phi_{i_l}(P_{l-1})].$$

Nótese que cada término representa a cantidade que cada enlace $i_l \in N$ mellora (ou empeora, se é negativa) o seu pago final cando a estrutura coalicional cambia de γ_{l-1} a γ_l , que é o cambio que este xogador é capaz de facer.

Nos nosos resultados, consideramos estruturas coalicionais derivadas de $\overline{N} := \{N\}$. Isto significa que nunha estrutura coalicional existe unha única “coalición grande” que pode ter dous ou mais membros, e o resto son coalicións de un so membro.

As demostracións dos seguintes resultados pódense atopar en Vidal Puga (2003).

Proposición: Para estruturas coalicionais derivadas de $\overline{N}$, o gradiente de calquera camiño pechado é 0.

Dadas dúas estruturas estratéxicas $\gamma, \gamma' \in \Gamma_P$, chamamos *gradiente de γ' con respecto a γ* ó gradiente de calquera camiño de γ a γ' . Este valor está ben definido: Supoñamos que existen dous camiños $\mathfrak{S} = \{\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m = \gamma'\}$ e $\mathfrak{S}' = \{\gamma, \gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_l = \gamma'\}$. Entón, o camiño pechado $\mathfrak{S}'' = \{\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m, \gamma'_{l-1}, \dots, \gamma'_1, \gamma\}$ ten o seu gradiente 0 e $0 = \nabla(\mathfrak{S}'') = \nabla(\mathfrak{S}) - \nabla(\mathfrak{S}')$. Polo tanto, $\nabla(\mathfrak{S}) = \nabla(\mathfrak{S}')$.

Teorema: Para estruturas coalicionais derivadas de $\overline{N}$, existe como mínimo un equilibrio de Nash con estratexias puras.

4. CONCLUSIÓN

O gradiente pode suxerir unha forma de medir a “estabilidade” da estrutura coalicional trivial “todos xuntos”. Sexa γ_1 a estrutura estratéxica “todos xuntos”. Isto é, $\gamma_1(i) = 1$ para todo $i \in N$. Sexa γ_0 a estrutura estratéxica “todos separados”. Isto é, $\gamma_0(i) = 0$ para todo $i \in N$. No xogo de unanimidade con 3 xogadores, o gradiente de γ_1 con respecto a

γ_0 é $1/4$. Neste caso, o incentivo dos xogadores a deixa-la coalición é positivo. No xogo de maioría simple con 3 xogadores (isto é, repartimos 1 euro entre tres xogadores se dous deles acordan como facelo), o gradiente de γ_1 con respecto a γ_0 é $-1/2$. Neste caso, non existe incentivo a deixa-la coalición.

5. AGRADECEMENTOS

Este traballo beneficiase da axuda económica do Ministerio de Ciencia y Tecnología a través do proxecto BEC2002-04102-C02-01, e da Xunta de Galicia a través do proxecto PGIDIT03PXIC30002PN.

6. REFERENCIAS

- Aumann R. J. e Myerson R. (1988). "Endogenous formation of links between players and coalitions: an application of the Shapley value". Essays in Honor of Lloyds S. Shapley, ed. por A. E. Roth, Cambridge University Press. Cambridge.
- Hart S. e Kurz M. (1983). "Endogenous formation of coalitions". *Econometrica* 51(4), 1047-1064.
- Heylighen F. (1995): "The prisoners' dilemma", en: F. Heylighen, C. Joslyn e V. Turchin (editores): *Principia Cybernetica Web* (Principia Cybernetica, Brussels).
URL: <http://pespmc1.vub.ac.be/PRISDIL.html>.
- Owen G. (1977). "Values of games with a priori unions", en: Henn R., Moeschlin O. (eds) *Essays in Mathematical Economics and Game Theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York: 76-88.
- Shapley L. S. (1953). "A value for n-person games", en: Kuhn H.W., Tucker A.W. (eds) *Contributions to the Theory of Games II*, Princeton University Press, Princeton NJ: 307-317.
- Vidal Puga J. (2003). "Negotiating membership". Mimeo.
URL: <http://webs.uvigo.es/vidalpuga/negotiation2.pdf>.