NO MANIPULABILIDAD EN JUEGOS DE INVENTARIO

Mosquera, M. A.² Fiestras-Janeiro, G.¹ García-Jurado, I.²

¹Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Universidade de Vigo

²Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Universidade de Santiago de Compostela

RESUMEN

En Meca et al. (1999) y en Meca (2000) se definen y se caracterizan axiomáticamente dos reglas de reparto para las clases de juegos de inventario y de juegos de mínimo coste de almacenamiento: la *SOC-rule* y la regla *Proporcional Mínimo Cuadrática*. En este artículo vamos a introducir dos nuevas caracterizaciones para estas reglas utilizando propiedades de no manipulabilidad, basadas en la no manipulabilidad definida por de Frutos (1999).

Palabras y frases clave: Juegos Cooperativos, Modelos de Inventario, No Manipulabilidad.

1. INTRODUCCIÓN

En una situación de coste de inventario, un grupo de empresas $N = \{1, \dots, n\}$ se pone de acuerdo para realizar conjuntamente los pedidos de un determinado producto necesario para todas ellas. Así estas empresas gastarán a unidades monetarias en vez de na cada vez que realicen un pedido ($a > 0$ es el coste fijo por realizar un pedido). Cada empresa i , si hace sus pedidos sola, realizará $\hat{m}_i \geq 0$ pedidos por unidad de tiempo, y el coste medio de inventario mínimo que tienen que pagar las empresas será

$$2a \sqrt{\sum_{i \in N} \hat{m}_i^2}.$$

Denotaremos por $(N, a, \hat{m})$ una situación de coste de inventario, donde $\hat{m} = (\hat{m}_1, \dots, \hat{m}_n)$. A partir de una situación de coste de inventario de este tipo definiremos el *juego de inventario* (N, c) como

$$c(S) = 2a \sqrt{\sum_{i \in S} \hat{m}_i^2} \quad \text{para todo } S \subset N, S \neq \emptyset$$

y $c(\emptyset) = 0$. Obsérvese que $c^2(S) = \sum_{i \in S} c^2(\{i\})$ para todo $S \subset N, S \neq \emptyset$.

Denotaremos por $\mathcal{I}(N)$ a la clase de juegos de inventario con conjunto de jugadores N , y por $\mathcal{I}$ a la clase de juegos de inventario con cualquier conjunto finito de jugadores.

En Meca et al. (2000) se define la *SOC-rule*, σ , como una regla de reparto del coste medio de inventario mínima. Esta regla σ propone que cada empresa i pague

- una parte del coste fijo de pedido proporcional al cuadrado $c(\{i\})^2$ de sus costes individuales.

- su propio coste de almacenamiento y de déficit (si lo hay).

De este modo a cada juego $(N, c) \in \mathcal{I}$, la SOC-rule, σ , le asigna a cualquier $i \in N$ la cantidad

$$\sigma_i(N, c) = \frac{c(\{i\})^2}{c(N)}.$$

En una situación de mínimo coste de almacenamiento, un grupo de empresas N se pone de acuerdo para realizar conjuntamente los pedidos de un determinado producto necesario para todas ellas y para almacenar el producto en un almacén que tenga el mínimo coste de almacenamiento. Estas empresas gastarán a unidades monetarias en vez de na cada vez que realicen un pedido ($a > 0$ es el coste fijo por realizar un pedido) y pagarán $h_N = \min_{i \in N} h_i$ por cada unidad de producto almacenada durante una unidad de tiempo ($h_i > 0$ es el coste de almacenar una unidad de producto durante una unidad de tiempo en el almacén de la empresa i). En esta nueva situación el coste medio de inventario mínimo que tienen que pagar las empresas será

$$2a \sqrt{\sum_{i \in N} d_i f_i(h_N)}$$

donde f_i es una función que es diferente según el modelo de inventario con el que estemos trabajando (EOQ, EOQ con déficits, EPQ o EPQ con déficits) y $d_i > 0$ es la demanda del producto por unidad de tiempo para la empresa i . Denotaremos por $(N, a, \{d_i, h_i, f_i\}_{i \in N})$ una situación de mínimo coste de almacenamiento. A partir de una situación de mínimo coste de almacenamiento de este tipo definimos el *juego de mínimo coste de almacenamiento* (N, c) como

$$c(S) = 2a \sqrt{\sum_{i \in S} d_i f_i(h_S)} \quad \text{para todo } S \subset N, S \neq \emptyset$$

y $c(\emptyset) = 0$.

A partir de ahora, denotaremos por $\mathcal{MCA}(N)$ a la clase de juegos de mínimo coste de almacenamiento con conjunto de jugadores N y por $\mathcal{MCA}$ a la clase de los juegos de mínimo coste de almacenamiento con cualquier conjunto finito de jugadores. También supondremos, sin pérdida de generalidad, que si $(N, c) \in \mathcal{MCA}(N)$, entonces $h_1 \leq h_2 \leq \dots \leq h_n$.

En Meca (2000) se define la regla *proporcional mínimo cuadrática* (PMC) como el reparto proporcional al cuadrado de los costes individuales en la gran coalición, es decir

$$\pi_i(N, c) = \frac{c^N(\{i\})^2}{c(N)} \quad \text{para todo } i \in N$$

dónde (N, c^N) es el juego de coste definido por

$$c^N(S) = \sqrt{\sum_{i \in S} 2ad_i f_i(h_N)} \quad \text{para todo } S \subset N, S \neq \emptyset$$

y $c^N(\emptyset) = 0$. Nótese que $c^N(N) = c(N)$. A Este juego le llamaremos *juego de coste en la gran coalición*.

Para estudiar más sobre estas clases de juegos, sobre la SOC-rule y sobre la regla PMC ver Meca et al. (1999, 2000).

2. SOC-RULE Y NO MANIPULABILIDAD

Los trabajos dedicados al desarrollo formal de los juegos de inventario han intentado buscar soluciones o reglas de reparto que asignen a cada juego de inventario un buen reparto del coste total entre las empresas. Aquí estudiamos reglas de reparto sobre la clase de juegos de inventario que sean inmunes ante manipulaciones de las empresas ya sean debidas a que un grupo de empresas se unen (o fusionan) para formar una única empresa, o bien una empresa se separa en varias subempresas repartiendo sus parámetros de una forma razonable.

Definición 1 Una regla de reparto ψ definida en la clase $\mathcal{I}$ satisface la Propiedad de No Manipulabilidad (PNM) si para todo par de juegos de coste de inventario $(N, c) \in \mathcal{I}(N)$, y $(L, c') \in \mathcal{I}(L)$ se verifica la siguiente condición. Si existe un subconjunto no vacío de N , $S \subset N$, e $i_S \in L$ tales que $L = (N \setminus S) \cup \{i_S\}$, $c'(\{i_S\}) = c(S)$, y $c'(\{j\}) = c(\{j\})$ para todo $j \in L \setminus \{i_S\}$, entonces

$$\psi_{i_S}(L, c') = \sum_{k \in S} \psi_k(N, c).$$

Vamos a caracterizar la SOC-rule utilizando la nueva propiedad de no manipulabilidad. Para ello vamos a demostrar primero una propiedad que cumplen las reglas de reparto eficientes y no manipulables sobre la clase de juegos de coste de inventario. Esta propiedad dice que estas reglas de reparto asignan un reparto a cada empresa $i \in N$ que no dependerá de los costes asociados al resto de coaliciones de N distintas de la coalición $\{i\}$ y de la coalición total N .

Proposición 1 Sea ψ una regla de reparto para la clase de juegos de coste de inventario. Si ψ verifica las propiedades de no manipulabilidad y eficiencia, entonces para todo $(N, c) \in \mathcal{I}$ y todo $i \in N$, $\psi_i(N, c)$ sólo depende de $c(N)^2$ y de $c(\{i\})^2$.

Demostración. Tomamos $(N, c) \in \mathcal{I}$ e $i \in N$. Supongamos que todas las empresas en $N \setminus \{i\}$ deciden unirse en una única empresa j . Obtenemos una nueva situación de inventario (L, c') donde $L = \{i, j\}$, $c'(\{j\}) = c(N \setminus \{i\})$ y $c'(\{i\}) = c(\{i\})$. Como ψ verifica la propiedad de no manipulabilidad

$$\psi_j(L, c') = \sum_{k \in (N \setminus \{i\})} \psi_k(N, c).$$

Esto unido a la eficiencia de ψ da lugar a que $\psi_i(N, c) = \psi_i(L, c')$.

Por otro lado $\psi_i(L, c')$ sólo depende de $c'(L)^2$ y de $c'(\{i\})^2$, ya que L es un conjunto de dos empresas, i y j , y $c'(L)^2 = c'(\{i\})^2 + c'(\{j\})^2$.

En consecuencia, $\psi_i(N, c)$ sólo depende de $c(N)^2$ y de $c(\{i\})^2$. ■

Para acabar esta sección probamos que la SOC-rule es la única regla eficiente y no manipulable.

Teorema 1 La SOC-rule, σ , es la única regla de reparto sobre la clase de juegos de coste de inventario que verifica las propiedades de eficiencia y no manipulabilidad.

Demostración. Se puede comprobar fácilmente que la SOC-rule verifica las propiedades de eficiencia y de no manipulabilidad.

Supongamos que la regla de reparto ψ verifica las propiedades de eficiencia y no manipulabilidad. Por la proposición 1, se verifica que para cada $(N, c) \in \mathcal{I}$

$$\psi_i(N, c) = f(c(N)^2, c(\{i\})^2) \text{ para todo } i \in N.$$

Debido a que ψ verifica la propiedad de no manipulabilidad, f es lineal en la segunda componente. Entonces se puede escribir

$$f(c(N)^2, c(\{i\})^2) = g(c(N)^2) \cdot c(\{i\})^2.$$

Y por eficiencia obtenemos que $g(c(N)^2) = 1/c(N)$. Por tanto

$$\psi_i(N, c) = \frac{c(\{i\})^2}{c(N)} = \sigma_i(N, c) \text{ para todo } i \in N \text{ y todo } (N, c) \in \mathcal{I}.$$

■

Esta caracterización está ajustada ya que si eliminamos la eficiencia tenemos que la regla idénticamente nula, $\psi(N, c) = 0$ para todo juego $(N, c) \in \mathcal{I}(N)$, verifica la propiedad de no manipulabilidad y no verifica la eficiencia. Y si eliminamos la propiedad de no manipulabilidad, existen multitud de reglas que verifican la eficiencia y no verifican la no manipulabilidad, por ejemplo la regla de reparto proporcional a los costes individuales, que dado $(N, c) \in \mathcal{I}$ le asigna a cada $i \in N$ el valor

$$\psi_i(N, c) = \frac{c(\{i\})}{\sum_{j \in N} c(\{j\})} c(N).$$

3. REGLA PMC Y NO MANIPULABILIDAD

En esta última sección vamos a definir una propiedad de no manipulabilidad sobre la clase de juegos de mínimo coste de almacenamiento y a caracterizar la regla PMC a través de esta propiedad.

Definición 2 Una regla de reparto ψ sobre la clase de juegos de mínimo coste de almacenamiento satisface la propiedad de *N-No Manipulabilidad (PNNM)* si para todo $(N, c) \in \mathcal{MCA}(N)$, y todo $(L, \bar{c}) \in \mathcal{MCA}(L)$ la siguiente condición se verifica. Si existe un conjunto no vacío $S \subset N$ e $i_S \in L$ tal que $L = (N \setminus S) \cup \{i_S\}$, $\bar{c}^L(\{i_S\}) = c^N(S)$, y $\bar{c}^L(\{j\}) = c^N(\{j\})$ para todo $j \in L \setminus \{i_S\}$, entonces

$$\psi_{i_S}(L, \bar{c}) = \sum_{k \in S} \psi_k(N, c).$$

Las reglas de reparto eficientes y *N-No Manipulables* satisfacen una importante propiedad, la cual dice que estas reglas asignarán un reparto a cada empresa i que dependerá, a lo sumo, del coste total $c(N)$, y del coste en la gran coalición de la propia empresa i , $c^N(\{i\})$. La propiedad es la siguiente:

Proposición 2 Sea ψ una regla de reparto sobre la clase de juegos de mínimo coste de almacenamiento. Si ψ satisface la propiedad de *N-no manipulabilidad* y la propiedad de eficiencia entonces para todo $(N, c) \in \mathcal{MCA}$ y todo $i \in N$, $\psi_i(N, c)$ sólo depende de $c^N(N)^2$ y de $c^N(\{i\})^2$.

Demostración. Sea $(N, c) \in \mathcal{MCA}$, $i \in N$ y ψ una regla de reparto sobre la clase de juegos de mínimo coste de almacenamiento. La demostración la haremos en dos partes, primero probaremos que si ψ satisface la propiedad de *N-no manipulabilidad* entonces $\psi_i(N, c)$ depende a lo sumo de $c^N(\{j\})^2$ para todo $j \in N$, y después, utilizando este hecho, probaremos que $\psi_i(N, c)$ depende a lo sumo de $c^N(\{i\})^2$ y de $c(N)^2$.

Supongamos que ψ satisface la propiedad de N-no manipulabilidad y que $\psi_i(N, c)$ depende de un parámetro a_i , distinto de cualquier función de $\{c^N(\{j\})^2\}_{j \in N}$, y de $c^N(\{j\})^2$ para todo $j \in N$. Es decir, se puede escribir $\psi_i(N, c)$ como función de a_i y de $\{c^N(\{j\})^2\}_{j \in N}$

$$\psi_i(N, c) = f(a_i, \{c^N(\{j\})^2\}_{j \in N}).$$

Ahora consideramos el juego $(N, c) \in \mathcal{MCA}$ y un juego $(M, \bar{c}) \in \mathcal{MCA}$ de modo que existe $S \subset M$ e $i \in N$ con $N = (M \setminus S) \cup \{i\}$, $c^N(\{i\}) = \bar{c}^M(S)$, y $c^N(\{j\}) = \bar{c}^M(\{j\})$ para todo $j \in N \setminus \{i\}$. Como ψ satisface la propiedad de N-no manipulabilidad tenemos que

$$f(a_i, \{c^N(\{j\})^2\}_{j \in N}) = \psi_i(N, c) = \sum_{k \in S} \psi_k(M, \bar{c}).$$

Modifiquemos sólo el parámetro a_i por a'_i y dejemos fijos $\{c^N(\{j\})^2\}_{j \in N}$, así obtenemos que $f(a'_i, \{c^N(\{j\})^2\}_{j \in N}) = \psi_i(N, c')$ para algún juego (N, c') tal que $c'^N(\{j\}) = c^N(\{j\})$ para todo $j \in N$. Si ahora consideramos el juego $(M, \bar{c})$ de antes y aplicamos la N-no manipulabilidad obtenemos que

$$f(a'_i, \{c^N(\{j\})^2\}_{j \in N}) = \psi_i(N, c') = \sum_{k \in S} \psi_k(M, \bar{c}).$$

Entonces

$$f(a'_i, \{c^N(\{j\})^2\}_{j \in N}) = f(a_i, \{c^N(\{j\})^2\}_{j \in N})$$

con lo cuál $\psi_i(N, c)$ depende a lo sumo de los $\{c^N(\{j\})^2\}_{j \in N}$.

Consideremos ahora el nuevo juego $(L, \bar{c}) \in \mathcal{MCA}$ tal que $L = \{i, j\}$, $\bar{c}^L(\{i\}) = c^N(\{i\})$ y $\bar{c}^L(\{j\}) = c^N(N \setminus \{i\})$, aplicando la propiedad de N-no manipulabilidad tenemos que

$$\psi_j(L, \bar{c}) = \sum_{k \in N \setminus \{i\}} \psi_k(N, c)$$

además ψ verifica la eficiencia, entonces

$$\psi_i(L, \bar{c}) = \bar{c}^L(L) - \psi_j(L, \bar{c}) = c(N) - \sum_{k \in N \setminus \{i\}} \psi_k(N, c) = \psi_i(N, c).$$

Como L es un conjunto de 2 empresas tenemos que $\psi_i(L, \bar{c})$ depende sólo de $\bar{c}^L(\{i\})^2$ y de $\bar{c}^L(L)^2$. Entonces $\psi_i(N, c)$ depende sólo de $c^N(\{i\})^2$ y de $c(N)^2$. ■

El siguiente paso es caracterizar la regla proporcional mínimo cuadrática (PMC) a través de esta nueva propiedad.

Teorema 2 *La única regla de reparto sobre la clase de juegos de mínimo coste de almacenamiento que satisface las propiedades de N-no manipulabilidad y eficiencia es la regla proporcional mínimo cuadrática, π .*

Demostración. Es similar a la del Teorema 1 en juegos de inventario considerando ahora c^N y utilizando la proposición 2. ■

Esta caracterización está ajustada ya que si eliminamos la eficiencia tenemos que la regla $\phi(N, c) = 0$ para todo juego $(N, c) \in \mathcal{MCA}(N)$, verifica la propiedad de N-no manipulabilidad. Y si eliminamos la propiedad de N-no manipulabilidad, existen multitud de reglas que

verifican la eficiencia, por ejemplo la regla de reparto proporcional a los costes individuales, que dado $(N, c) \in \mathcal{MCA}$ le asigna a cada $i \in N$ el valor

$$\phi_i(N, c) = \frac{c(\{i\})}{\sum_{j \in N} c(\{j\})} c(N).$$

4. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología y FEDER a través del proyecto BEC2002-04102-C02-02 y por la Consellería de Innovación, Industria e Comercio de la Xunta de Galicia a través del incentivo PGIDIT03PXIC20701PN.

REFERENCIAS

- Frutos M.A.** (1999) *Coalitional manipulations in a bankruptcy problem*. Review of Economic Design 4:255-272.
- Meca A.** (2000) *Juegos cooperativos asociados a problemas de inventario*. PhD dissertation. Miguel Hernández University.
- Meca A., Timmer J., García-Jurado I. and Borm P.** (1999) *Inventory Games*. Discussion Paper 9953. Tilburg University.
- Meca A., García-Jurado I. and Borm P.** (2000) *Cooperation and Competition in Inventory Games*. Discussion Paper I-2001-28. Miguel Hernández University.