VI Congreso Galego de Estatística e Investigación de Operacións
Vigo 5-7 de Novembro de 2003

PROGRAMAÇÃO LINEAR: TOMADA DE DECISÕES, UMA NOVA ABORDAGEM NO ENSINO SECUNDÁRIO

Maria José Teixeira do Nascimento[1], Maria Manuel da Silva Nascimento[2]
[1]Escola Secundária de Vila Pouca de Aguiar
Vila Pouca de Aguiar, Portugal
[2]Departamento de Matemática
Universidade de Tras-os-Montes e Alto Douro

RESUMO

Este trabalho apresenta uma situação de Programação Linear (PL) na tomada de decisões, na perspectiva de uma abordagem no Ensino Secundário. Pretende-se que os alunos saibam formular problemas de PL simples, consigam determinar a sua solução óptima, explicá-la e relatá-la. São referidos os tópicos programáticos e os objectivos. Também são sugeridas as etapas desta aprendizagem na sala de aula.

Palavras e frases chave: Programação Linear; Tomada de decisões; Objectivos.
Clasificação AMS: (opcional)

1. INTRODUÇÃO

Na Reorganização Curricular do Ensino Secundário, um dos temas propostos para as disciplinas de Matemática A e B é a Programação Linear (PL). Introduzindo um novo tema, a PL permitirá ao aluno aplicar conceitos do 10º ano e ampliados no 11º ano.

A PL é um método matemático de distribuir quantidades fixas de recursos, conseguindo optimizar (maximizar ou minimizar) um determinado objectivo e satisfazer, simultaneamente, as condições definidas (Shamblin e Stevens, 1987). Assim, os problemas de PL são dirigidos à modelação de situações reais. Como motivação suplementar para os alunos, surge o estudo de alternativas na tomada de decisões, sobretudo quando passam a saber manipular e interpretar os resultados fornecidos pelos *softwares* de PL.

Iniciou-se este trabalho enquadrando a PL no Ensino Secundário. Em particular são destacados os tópicos programáticos e os respectivos objectivos. De forma resumida, apresenta-se um problema de PL (PPL) de maximização, destcando-se a sua formulação matemática e as resoluções gráfica e com softwares de PL. No contexto preconizado pelo enquadramento metodológico dos programas portugueses de Matemática, são sugeridas as etapas da aprendizagem deste novo tema na sala de aula.

2. PROGRAMAÇÃO LINEAR NO ENSINO SECUNDÁRIO

A Reorganização Curricular que vai ser implementada no Ensino Secundário (16 a 18 anos) português a partir do próximo ano lectivo, incluiu nos conteúdos programáticos novos temas, entre os quais se encontra a Programação Linear. Este tema será abordado na perspectiva do seu equadramento neste nível de ensino. O objectivo desta nova Reorganização inclui a motivação dos alunos para necessidade diária da tomada de decisão, bem como para a necessidade de lidarem com as possíveis modificações, logo alterações nos PPL originais. A determinação da solução óptima (SO) pode ser simples (requerendo apenas uma abordagem analítica ou geométrica) se o problema tiver um número reduzido de variáveis e de restrições.

Contudo, na maior parte das vezes, os PPL são resolvidos por programas de computador, pois a sua formulação envolve inúmeras variáveis e/ou muitas restrições. Esses programas facilitam a tarefa da determinação da SO e também permitem simplificar a análise das alterações dos PPL iniciais. Visando o uso das novas tecnologias na sala de aula, os alunos devem ser incentivados a usar os programas de computador, ou mesmo a realizar pesquisas na *internet*. Além disso, também poderão ser encorajados a procurar novas aplicações para as suas calculadoras gráficas. De seguida, serão referidos os tópicos programáticos e os objectivos respectivos. Finalmente, será apresentado um exemplo e será pormenorizado o seu enquadramento por forma apresentar algumas das (possíveis) pistas no tratamento deste novo tema na sala de aula.

2.1. Tópicos programáticos e objectivos

TÓPICOS PROGRAMÁTICOS:

11º Ano (Matemática A)

Programação Linear – Breve introdução;

Domínios Planos – interpretação geométrica de condições

12º Ano (Matemática B)

Tema IV – Problemas de optimização

Programação Linear como ferramenta de planeamento e gestão;

OBJECTIVOS:

11º Ano (Matemática A)

Formular matematicamente um problema; Representar regiões do plano limitadas por rectas; Identificar a posição relativa das rectas; Determinar os pontos de intersecção das rectas; Identificar geometricamente pontos do plano como solução do PPL, bem como pontos do plano como solução óptima do PPL; Escolher, analisar e validar o conjunto das soluções e a solução óptima de um PPL.

12º Ano (Matemática B)

Reconhecer que diferentes situações podem ser descritas pelo mesmo modelo matemático; Resolver numérica e graficamente problemas simples de PL; reconhecer o contributo da matemática para a tomada de decisões, assim como as suas limitações.

2.2. Enunciado e (possíveis) resoluções

Uma empresa pretende fabricar dois produtos, P_1 e P_2. Além do processamento automático efectuado em duas máquinas M_1 e M_2, cada um dos produtos requer ainda um acabamento manual. As exigências de tempo de fabrico para produzir uma unidade de produto e a quantidade fixa de horas-máquina disponíveis por máquina e por mês e de horas- homem disponíveis por mês, assim como os lucros unitários de cada produto estão resumidas na tabela da Figura 1, seguinte.

	CAPACIDADE UTILIZADA POR UNIDADE DE PRODUTO (horas)		
	P_1	P_2	CAPACIDADE DISPONÍVEL (horas/mês)
M_1	2	2	160
M_2	1	2	120
MÃO-DE -OBRA	4	2	280
LUCRO UNITÁRIO (unidades monetárias, u.m.)	1	1.5	

Figura 1 – Tabela que esquematiza dos dados do problema.

Pretende-se decidir quantas unidades se devem fabricar de cada produto de modo a fazer o melhor uso possível das disponibilidades horárias das máquinas e da mão-de-obra por forma a maximizar o lucro da sua venda (adaptado de Shamblin e Stevens, 1987).

2.2.1. Formulação matemática do problema

Variáveis de decisão:

x_1 = número de unidades do produto P_1 que devem ser produzidas por mês

x_2 = número de unidades do produto P_2 que devem ser produzidas por mês

Função objectivo:

$$Maximizar \quad Z = 1\,x_1 + 1.5\,x_2$$

Restrições:

Sujeito a

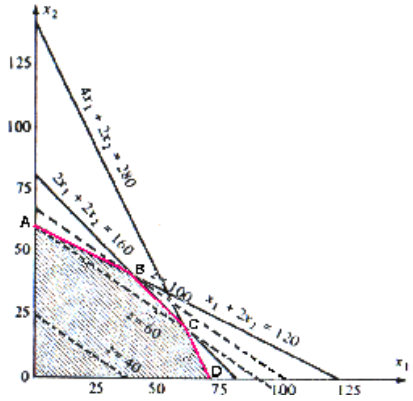
$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\leq 160 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 120 \\ 4x_1 + 2x_2 &\leq 280 \quad \text{com} \quad x_1 \geq 0 \; e \; x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

2.2.2. Resolução pelo método gráfico

Apesar da resolução pelo método gráfico poder ser, mais ou menos, pormenorizada optou-se por uma apresentação simplificada nos seguintes passos:

1º passo: Identificar, no plano, os valores de x_1 e x_2 que satisfaçam todas as restrições, isto é, determinar o conjunto das soluções admissíveis.

2º passo: Determinar a solução óptima.



Coordenadas dos vértices da região admissível	Valor da função objectivo
O(0, 0)	0
A(60, 0)	60
B(40, 40)	100
C(60, 20)	90
D(70, 0)	70

Figura 2 – Representação gráfica das restrições e do conjunto das soluções admissíveis do problema

Os pontos de tangência obtidos, correspondem aos pontos da região admissível que optimizam a função objectivo. A recta escolhida, de equação $x_1 + 1.5\,x_2 = 100$, passa pelo ponto de coordenadas (40, 40), pelo que a solução óptima pretendida é $x_1 = 40$ e $x_2 = 40$. É o que se visualiza na Figura 2.

3º passo: Relatório.

A SO obtida encontra-se na intersecção da primeira e da segunda restrições. Verifica-se ainda que as disponibilidades para a primeira e para segunda restrições são atingidas, enquanto que o da terceira restrição não é atingido pois:

$2x_1 + 2x_2 \leq 160 \;\; (2\times 40 + 2\times 40 = 160)$; $x_1 + 2x_2 \leq 120 \;\; (40 + 2\times 40 = 120)$; $4x_1 + 2x_2 \leq 280 \;\; (4\times 40 + 2\times 40 = 240 < 280)$.

Na prática, isto quer dizer que foram gastas todas as capacidades disponíveis relativas às máquinas 1 e 2 (1: 160–160 = 0; 2: 120–120 = 0) e que 40 (280-240 =40) horas-homem de

mão de obra não foram utilizadas. Assim, a SO obtida corresponde ao plano de produção que conduz ao seguinte

RELATÓRIO: Fabricar 40 unidades por mês de cada produto P_1 e P_2. Este plano de produção esgota as disponibilidades mensais horárias das duas máquinas e conduz à não utilização de 40 horas de mão-de-obra das disponibilizas por mês (significado prático). Este plano de produção permite que a empresa tenha um lucro de 100 unidades monetárias por mês (significado económico).

2.2.3. Resoluções fornecidas pelos softwares de PL

São apresentadas as Figuras 3, 4 e 5 com os principais extractos das resoluções do PPL enunciado, utilizando três dos softwares de PL. Esta escolha engloba o módulo *Solver* do *Excel*, o *LP Explorer* (retirado da *internet* em *http://www.maths.ed.ac.uk/*) e um programa de manipulação simples QSB+ (Chang e Sullivan, 1996). Nos dois últimos *softwares* destacam-se as resoluções (a duas dimensões) pelo método gráfico.

PPLPRODUÇÃO				
VAR. DECISÃO				
X1	X2			
40	40			
COEF. FUNÇÃO OBJECTIVO				
X1	X2			
1	1.5			
	FUNÇÃO OBJECTIVO			
	100			
COEF DAS CONDIÇÕES				
	X1	X2	LADO ESQUERDO	LADO DIREITO
MAQ1	2	2	160	160
MAQ2	1	2	120	120
MOBRA	4	2	240	280

Microsoft Excel 9.0 Relatório de respostas
Folha de cálculo: [PPLprodução.xls]PPLPRODUÇÃO
Relatório gerado: 31-07-2003 20:35:14

Célula de destino (Máx)

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$B$13	FUNÇÃO OBJECTIVO	0	100

Células ajustáveis

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$A$6	X1	0	40
$B$6	X2	0	40

Restrições

Célula	Nome	Valor da célula	Fórmula	Estado	Tolerância
$D$18	MAQ2 LADO ESQUERDO	120	$D$18<=$E$18	Arquivar	0
$D$17	MAQ1 LADO ESQUERDO	160	$D$17<=$E$17	Arquivar	0
$D$19	MOBRA LADO ESQUERDO	240	$D$19<=$E$19	Não arquivar	40
$A$6	X1	40	$A$6>=0	Não arquivar	40
$B$6	X2	40	$B$6>=0	Não arquivar	40

Figura 3 – Esquema do uso do módulo *Solver* do *Excel*

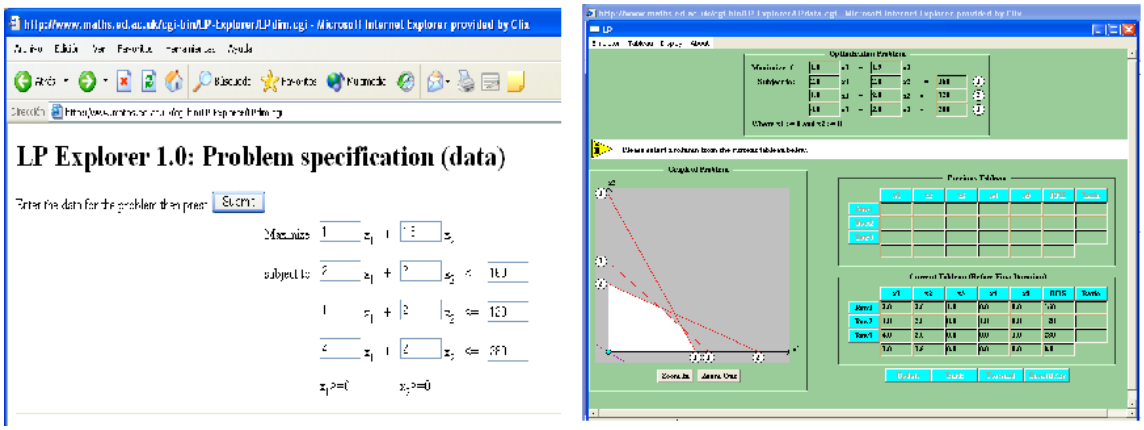


Figura 4 – Esquema do uso do *LP Explorer*

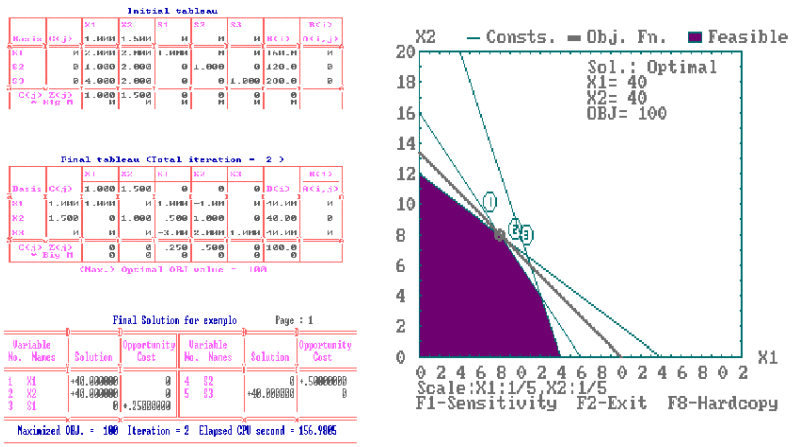


Figura 5 – Esquema do uso do *QSB+*

Apenas uma nota final, para mencionar que, a par da resolução pelo método gráfico, pode ser sempre executado o método simplex, um dos métodos analíticos que, regra geral, está na base da implementação dos programas de computador (aliás, o único método que é possível adoptar no caso de problemas com inúmeras variáveis e/ou restrições) Esse método pode ter uma visualização tabular, tal como a que é apresentada na Figura 4 no esquema do uso do *LP Explorer* ou, ainda, na Figura 5 no esquema do uso do *QSB+*.

2.2.4. Etapas na sala de aula

De acordo com as sugestões metodológicas gerais dos programas portugueses de Matemática, nas aulas deve ser fomentado o trabalho de grupo e o trabalho de pares de tal forma que o aluno, na sua aprendizagem, desenvolva a sua iniciativa, bem como se aperceba da ligação destes modelos às tomadas de decisão no dia a dia, isto é, às situações reais. Neste contexto, a aprendizagem da PL poderá envolver as seguintes etapas:

1- Formulação matemática do PPL: Ler e identificar a situação de modelo de PL. Por exemplo, resumindo os dados numa tabela como a da Figura 1.

2- Resolução pelo método gráfico: Representar regiões do plano limitadas por rectas; Identificar a posição relativa das rectas; Determinar os pontos de intersecção das rectas; Identificar geometricamente pontos do plano como soluções do PPL, bem como pontos do plano como solução óptima do PPL; Escolher, analisar e validar o conjunto das soluções e a solução óptima de um PPL (Figura 2).

3- Resolução usando os softwares: Tendo aprendido o método gráfico, utilizar as novas tecnologias, quer na sua vertente informática (Figuras 3, 4 e 5), quer procurando novas aplicações para as suas calculadoras gráficas.

4- Apresentação e discussão da solução óptima: Determinada a SO de um PPL, apresentar oralmente e por escrito (na forma de relatório) as interpretações gráfica, prática e económica dessa solução.

5- Apresentação e discussão de alterações da solução óptima: Determinada a SO de um PPL, como motivação suplementar para os alunos, surge o estudo de alternativas na tomada de decisões, sobretudo quando passam a saber manipular e interpretar os resultados fornecidos pelos *softwares* de PL (por exemplo, usando o relatório de sensibilidade do módulo *Solver* do *Excel*).

3. CONCLUSÕES

Este trabalho permitiu uma abordagem inicial ao novo tema de Programação Linear, proposto na Reorganização Curricular do Ensino Secundário. A sistematização e a síntese aqui apresentadas levam-nos a acreditar que, com as adaptações inerentes a estes novos conteúdos para este nível de ensino, a aprendizagem na sala de aula tem todos os elementos para vir a ser bem aceite pelos alunos. Se tal acontecer, o professor conseguirá captar o interesse dos alunos para a Programação Linear e para a sua possibilidade de aplicação às situações reais de tomada de decisões.

4. REFERÊNCIAS

Chang, Y-L. e R. S. Sullivan, (1996). *Quantitative Systems for Business Plus - Version 2.1*. Prentice-Hall, New Jersey.

Ferreira, J. S. (1978). *Introdução à Programação Linear.* Clássica Editora, 2. Ed.

Ministério da Educação (2003). Matemática A e B. Programas 10º, 11º e 12º anos. Ministério da Educação, Depº do Ensino Secundário (*in* http://www.mat-no-sec.org/programas.html, 30-05-2003, 12:20)

Murty, Katta G. (1983). *Linear Programming.* John Wiley & Sons., EUA, 2. Ed.

Nascimento, M. José Teixeira do, (2002). *Tópicos elementares de Programação Linear.* UTAD, Vila Real.

Nascimento, M. Manuel da S., (em publicação). *Tarefas Teórico-Práticas de Programação Linear.* UTAD, Vila Real.

Shamblin, J. E. e G. T. Stevens, (1987). *Pesquisa Operacional: uma abordagem básica*. Atlas S.A., São Paulo.