

SIMULACIÓN EN EXCEL DE PROBLEMAS CLÁSICOS DE PROBABILIDADES CUN ENFOQUE DIDÁCTICO

Juan Carlos Pardo-Fernández¹, Javier Roca-Pardiñas¹

¹Departamento de Estatística e Investigación Operativa
Universidade de Vigo

RESUMO

O uso do xerador de números aleatorios de Excel resulta útil para simular problemas de probabilidades. Neste traballo revisamos dous problemas clásicos de cálculo de probabilidades: a Agulla de Buffon e a Paradoxa de Bertrand. Con ...ns didácticos realizamos unha pequena simulación en Excel que permite resolver de forma práctica os dous problemas presentados.

1. INTRODUCCIÓN

Un paso clave en simulación é ter rutinas que xeren variables aleatorias con distribucións específicas: exponencial, normal, etc. Isto faise en dúas fases. Primeiro xérase unha secuencia de números aleatorios distribuídos uniformemente entre 0 e 1, e despois esta secuencia é transformada para obter os valores aleatorios das distribucións desexadas.

As follas de cálculo, coma por exemplo Excel, son capaces de xerar números aleatorios cunha distribución uniforme no intervalo [0,1]. Este tipo de números aleatorios son os elementos básicos a partir dos que se desenvolve calquera simulación por ordenador.

En Excel é posible obter un número aleatorio con distribución uniforme en [0,1] usando a función ALEATORIO(). Esta función é volátil en Excel. Isto signi...ca que cada vez que pulsamos a tecla F9 todas as celas onde apareza a función ALEATORIO() son recalculadas de forma automática. Pódense atopar exemplos do uso desta función no propio menú de axuda de Excel ou en Pérez (2002). Por exemplo, para xerar un número aleatorio no intervalo [a; b] pódese usar a función $a + \text{ALEATORIO}() * (b - a)$.

Os números xerados coa función ALEATORIO() cumpren as seguintes propiedades:

- calquera número entre 0 e 1 ten a mesma probabilidade de ser xerado (de aí o nome de distribución uniforme).
- os diferentes números xerados son estatisticamente independentes uns dos outros, é dicir, o valor do número xerado nun momento dado non depende dos valores xerados con anterioridade.

Neste traballo utilizaremos o xerador de números aleatorios de Excel para resolver de forma empírica dous problemas clásicos de cálculo de probabilidades: a Agulla de Buffon e a Paradoxa de Bertrand. Cremos que este procedemento de simulación en Excel aplicado a este tipo de problemas con distintos graos de di...cultade resulta satisfactorio a nivel didáctico para explicar cálculo de probabilidades.

2. A AGULLA DE BUFFON

A Agulla de Buffon é un problema clásico de probabilidades xeométricas (ver por exemplo Feller 1978). Supoñamos que se lanza ao azar unha agulla de lonxitude l sobre unha mesa na que están trazadas rectas paralelas distanciadas esa mesma lonxitude l . Trátase de calcular a probabilidade de que a agulla corte a algunha das rectas.

Denotemos por A o suceso de interese. A posición da agulla queda determinada polo ángulo que forma coas rectas paralelas e o seu punto medio. Sexa μ ese ángulo e r a distancia entre o punto medio da agulla e a recta máis próxima. Está claro que os posibles valores de μ están no intervalo $[0; \frac{\pi}{2}]$ e os de r en $[0; 0.5l]$. Dado un valor xado da distancia r , os ángulos que resultan favorables ao suceso A son os μ tales que $0.5l \sin \mu \geq r$. Por un razoamento de probabilidades xeométricas pódese concluír que

$$P(A) = \frac{\int_0^{\pi/2} 0.5l \sin \mu d\mu}{0.5l \pi/2} = \frac{2}{\pi}$$

Para calcular de forma empírica a probabilidade do suceso A simularemos en Excel o experimento un número elevado de veces e calcularemos a proporción de veces que ocorre. Por simplicidade na programación poñemos $l = 1$. Para sortear unha agulla abonda con simular de maneira aleatoria a posición dun dos seus extremos x_{ini} e o ángulo $\hat{A}$ que forma coas rectas paralelas. Simulamos os extremos $x_{ini} = (x_{ini}^1, x_{ini}^2)$ con dous números aleatorios independentes uniformes no intervalo $[1, 4]$. O ángulo $\hat{A}$ simúlase como un número aleatorio uniforme no intervalo $[0; 2\pi]$. Desta maneira as coordenadas do outro extremo da agulla son

$$x_{fin} = (x_{fin}^1, x_{fin}^2) = (x_{ini}^1, x_{ini}^2) + (\cos \hat{A}; \sin \hat{A})$$

Unha vez simulada a agulla, definimos a variable binaria

$$d = \begin{cases} 1 & \text{se } [x_{ini}^1] \neq [x_{fin}^1] \text{ ó } [x_{ini}^2] \neq [x_{fin}^2] \\ 0 & \text{se } [x_{ini}^1] = [x_{fin}^1] \text{ ó } [x_{ini}^2] = [x_{fin}^2] \end{cases}$$

onde $[x]$ representa a parte enteira dun número. O suceso A ocorre sempre e cando $d = 1$.

Repetindo o proceso un número elevado de veces obtemos unha estimación de $P(A)$ promediando os valores da variable d . Na Figura 1 aparecen varias simulacións gráficas do experimento.

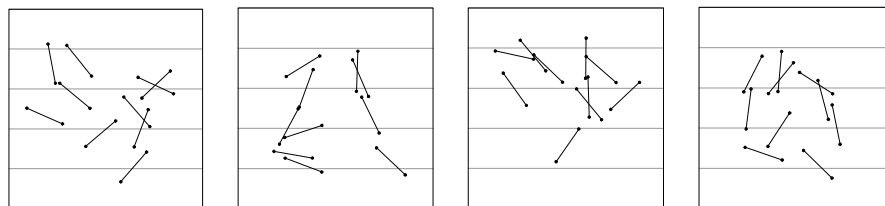


Figura 1. Gráficas xeradas en Excel para o problema da Agulla de Buffon.

3. A PARADOXA DE BERTRAND

A Paradoxa de Bertrand serve para ilustrar o feito de que como se define o espazo mostrable dun experimento aleatorio condiciona o resultado do cálculo de probabilidades (ver por exemplo Rohatgi 1976). O problema consiste en, dado un círculo de radio unidade e unha corda sorteada ao azar nese círculo, calcular a probabilidade de que a lonxitude da corda sexa maior cá do lado do triángulo equilátero inscrito no círculo.

Este problema pode ser resolto de varias formas. Dependendo de como se interprete o carácter aleatorio no sorteo da corda, as probabilidades obtidas son diferentes. Explicaremos e simularemos en Excel dúas solucións para este problema. Sexa B o noso suceso de interese.

Solución 1. Unha corda no círculo queda determinada por dous ángulos $\mu_1, \mu_2 \in [0; 2\pi/3]$. Supoñamos, por simetría, que o valor de μ_1 está uniformemente repartido. Entón para que a lonxitude da corda sexa maior cá do lado do triángulo (esta lonxitude é $\sqrt{3}$), o ángulo μ_2 ten que pertencer ao intervalo $[2\pi/3; 4\pi/3]$. Así $P(B) = (4\pi/3 - 2\pi/3) / (2\pi/3) = 1/3$.

Solución 2. Cada punto no círculo determina unha única corda. Abonda con considerar que dito punto é o punto medio da corda. Os puntos favorables para o suceso B son os que distan do centro do círculo menos que $1/2$. Polo tanto $P(B) = \pi (1/2)^2 / \pi = 1/4$.

Podemos resolver este problema tamén de forma empírica simulándoo en Excel. O mecanismo utilizado para simular as cordas será o que determine se nos atopamos no esquema da solución 1 ou no da solución 2.

Simulación da solución 1. Para simular unha corda xeramos de forma independente dous ángulos μ_1 e μ_2 uniformemente no intervalo $[0; 2\pi/3]$.

Simulación da solución 2. Simulamos puntos no círculo de maneira uniforme. Para isto utilizamos o algoritmo de aceptación-rechazo, cos seguintes pasos:

1. Simular independentemente c_1 e c_2 de acordo a unha distribución uniforme no intervalo $[0; 1]$.
2. Se $c_1^2 + c_2^2 < 1$, utilizar como punto central da corda $c = (c_1; c_2)$. Noutro caso voltar a 1.

Dado o punto c no círculo, os ángulos que determinan a corda que ten a c por punto medio son $\mu_1 = \arctan c_2/c_1$ e $\mu_2 = \arctan c_2/c_1 + \arccos \frac{c_1^2 + c_2^2}{1}$.

En ambas as dúas propostas, o suceso B ocorre cando a variable d toma o valor 1, sendo

$$d = \begin{cases} 1 & \text{se } (\cos \mu_1 - \cos \mu_2)^2 + (\sin \mu_1 - \sin \mu_2)^2 > 3 \\ 0 & \text{se } (\cos \mu_1 - \cos \mu_2)^2 + (\sin \mu_1 - \sin \mu_2)^2 \leq 3 \end{cases}$$

Repetindo o proceso un número elevado de veces e promediando os valores da variable d teremos estimacións empíricas para $P(B)$. Nas Figuras 2 e 3 aparecen catro realizacións do experimento para cada unha das solucións propostas.

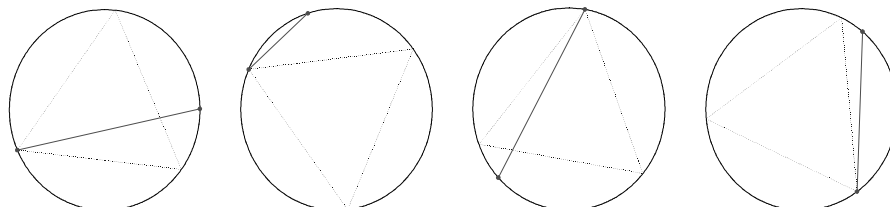


Figura 2. Gráficos xerados en Excel para a Solución 1 da Paradoxa de Bertrand.

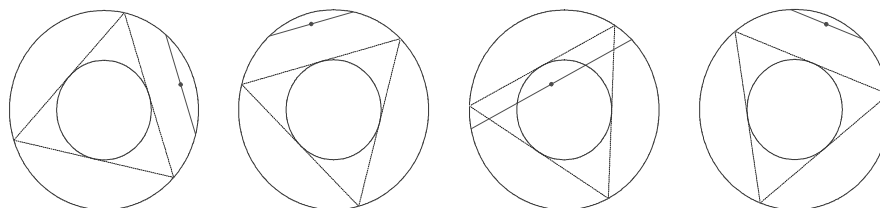


Figura 3. Gráficos xerados en Excel para a Solución 2 da Paradoxa de Bertrand.

5. AGRADECEMENTOS

Os autores deste traballo agradecen o apoio económico do Vicerreitorado de Investigación da Universidade de Vigo. Ademais Juan Carlos Pardo está financiado polo programa BFM2002-03213 do Ministerio de Ciencia e Tecnoloxía (inclúe fondos FEDER).

6. REFERENCIAS

- Feller, W. (1978) Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus Aplicaciones (Vol. 2). LIMUSA.
- Pérez, C. (2002) Estadística Aplicada a través de Excel. Prentice Hall.
- Rohatgi, V. K. (1976) An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics. John Wiley and Sons.