SGAPEIO
Sociedade Galega para a Promoción da Estatística e da Investigación de Operacións

Banco Gallego

Fundación Barrié

HASTA DONDE LAS FINANZAS SE PUEDEN CONTAR

Asamblea Xeral da SGPAEIO

16 de febrero de 2013

Silvia Barco Tato

Directora de Control Financiero y Middle Office en Banco Gallego

ÍNDICE

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN: FINANZAS CUANTITATIVAS

- Las **finanzas cuantitativas** son la parte de las finanzas que se pueden contar, o lo que es lo mismo, la parte de las finanzas a las que se aplican las matemáticas financieras, sobre todo la estadística.

- Las finanzas cuantitativas comenzaron en Estados Unidos en los **años cincuenta** cuando algunos inversores comenzaron a utilizar fórmulas matemáticas para la asignación de precios de acciones y bonos.

- **Harry Markowitz**, en su tesis de doctorado "*Portfolio Selection*" publicada en 1952, fue uno de los primeros en adaptar formalmente conceptos matemáticos a las finanzas. Markowitz formalizó una noción de rentabilidad media y de convarianzas para acciones que le permitió cuantificar el concepto de "diversificación" en un mercado.

- En 1969, Fischer Black y Myron Scholes desarrollaron el **modelo Black–Scholes**, de valoración de opciones, que fue galardonado en 1997 con el Premio Nobel de Economía.

INTRODUCCIÓN: TESORERÍA Y MERCADO DE CAPITALES

CONTRATAN OPERATIVA PROPIA

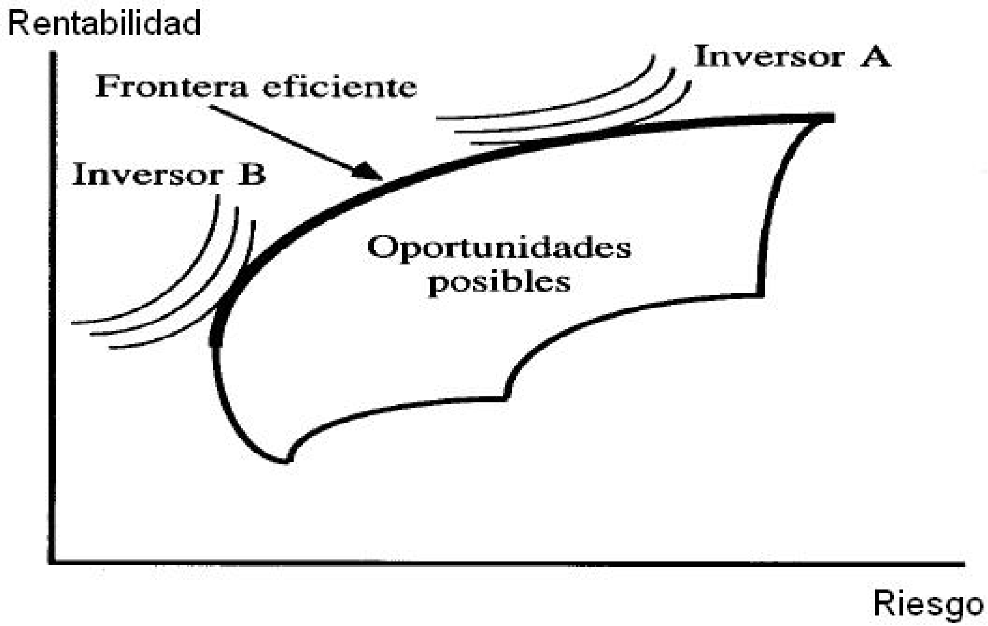
LIQUIDAN Y CONTABILIZAN

VALORAN, MIDEN Y CONTROLAN RIESGOS

ÍNDICE

GESTIÓN DE CARTERAS: MODELO DE MARKOWITZ

- En su modelo, Markowitz, dice que los inversionistas tienen una conducta racional a la hora de seleccionar su cartera de inversión y por lo tanto siempre buscan obtener la máxima rentabilidad sin tener que asumir un alto nivel de riesgo. Nos muestra también, como hacer una cartera óptima disminuyendo el riesgo de manera que el rendimiento no se vea afectado.



GESTIÓN DE CARTERAS: MODELO DE MARKOWITZ

- Para Markowitz, un inversor debería evaluar carteras alternativas basándose en sus *rendimientos esperados* y en su *desviación típica* (como medida del riesgo).

- Planteado ya el problema, Markowitz (1952) establece el objetivo de fijar el menú de las posibles combinaciones de rentabilidad (R) y riesgo que se puede elegir, siendo el peso asignado a los activos (W) la variable sobre la cual va a tener capacidad de decisión el agente. Si sólo tuviésemos que decidir entre dos activos la formulación estadística sería:

$$R_p = w.R_1 + (1\text{-}w).R_2$$

$$Riesgo_p = (w^2 * VAR_1^2 + (1\text{-}w)^2 * VAR_2^2 + 2*w*(1\text{-}w)* VAR_1 * VAR_2 *correlación_{12})^{1/2}$$

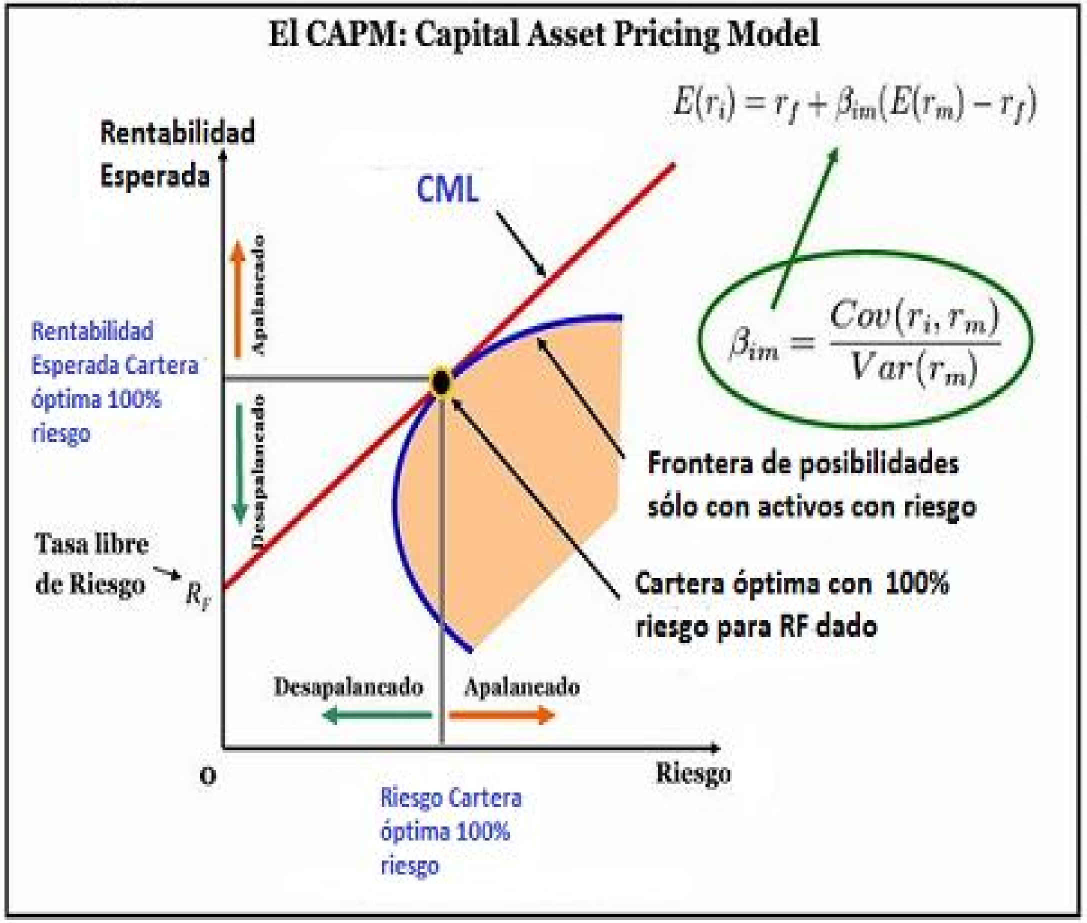
Al ir cambiando el valor de w, obtenemos pares de rentabilidad y riesgo, que representan las distintas alternativas posibles, comprendiendo de esta manera al conjunto factible.

GESTIÓN DE CARTERAS: MODELO CAPM

- El **CAPM** (*Modelo de Fijación de precios de activos de capital*) es un modelo utilizado para determinar la tasa de rentabilidad teóricamente requerida para un cierto activo, si éste es agregado a una cartera adecuadamente diversificada y a través de estos datos obtener la rentabilidad y el riesgo de la cartera total. El modelo toma en cuenta la sensibilidad del activo al riesgo no-diversificable (conocido también como riesgo sistémico, β), así como la rentabilidad esperada del mercado y del activo libre de riesgo.

- Para activos individuales, hace uso de la recta *security market line (SML)* y su relación con el rentabilidad esperada y el riesgo sistémico (β), para mostrar cómo el mercado debe estimar el precio de un activo individual en relación a la clase a la que pertenece. La línea SML permite calcular la proporción de recompensa-a-riesgo para cualquier activo en relación con el mercado general.

GESTIÓN DE CARTERAS: MODELO CAPM



- $E(r_i)$ es la tasa de rendimiento esperada de capital sobre el activo i.
- $E(r_m - r_f)$ es el exceso de rentabilidad del portafolio de mercado.
- (r_m) Rendimiento del mercado.
- (r_f) Rendimiento de un activo libre de riesgo.

ÍNDICE

VALORACIÓN DE OPCIONES: DEFINICIÓN Y CARACTERÍSTICAS GENERALES

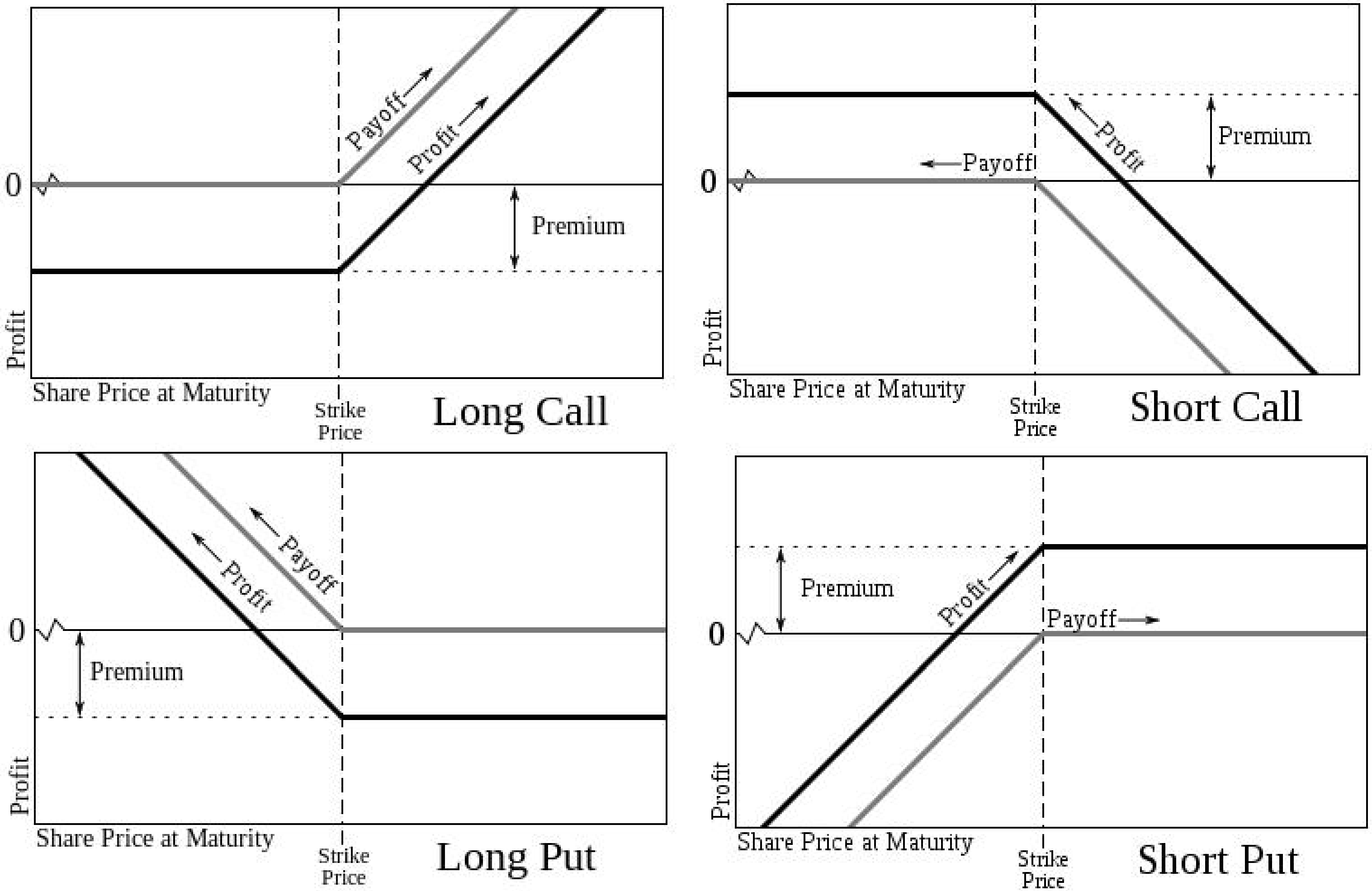
- Una opción es un acuerdo por el cual el comprador adquiere un derecho (no una obligación) de comprar (**call**) o vender (**put**) un cierto activo (**activo subyacente**) a un precio determinado durante un tiempo estipulado o en una fecha determinada. El precio al que se adquiere el derecho se conoce como **precio de ejercicio** o strike. El comprador de la opción pagará una **prima** al vendedor por el derecho adquirido.

- Se dice que una opción está ***at-the-money*** si el precio del activo subyacente es igual al strike de la opción, ***in-the-money*** si el precio del activo subyacente es superior al strike de la opción y ***out-the-money*** si el precio del activo subyacente es inferior al strike de la opción.

- El *pay-off* es la liquidación final de la opción como consecuencia de su ejercicio.
  - Pay-off (call) = max (0, S-K)
  - Pay-off (put) = max (0, K-S)

donde S es el valor del subyacente y K es el precio de ejercicio.

VALORACIÓN DE OPCIONES: DEFINICIÓN Y CARACTERÍSTICAS GENERALES



VALORACIÓN DE OPCIONES: DEFINICIÓN Y CARACTERÍSTICAS GENERALES

- El valor de una call o put es función de varias variables:
  - Precio del activo subyacente
  - Precio de ejercicio de la opción
  - Volatilidad implícita: volatilidad cotizada en el mercado que éste asigna a la evolución futura del precio del activo subyacente para la vida de la opción. No se trata de la volatilidad histórica del precio del activo subyacente aunque puede existir alguna relación.
  - Tipo de interés libre de riesgo: tipo de interés de mercado correspondiente al plazo existente entre la fecha de valoración y el vencimiento de la opción.
  - Dividendos que paga el activo subyacente
  - Tiempo al vencimiento de la opción

	CALL	PUT
Precio Subyacente	Positiva	Negativa
Precio Ejercicio	Negativa	Positiva
Volatilidad	Positiva	Positiva
Tipo de Interés	Positiva	Negativa
Dividendo	Negativa	Positiva
Tiempo a vto.	Positiva	Positiva

VALORACIÓN DE OPCIONES: MODELO BINOMIAL

- El modelo binomial fue desarrollado por Cox, Ross y Rubinstein en 1979, no es un método analítico si no numérico y realiza sus cálculos en tiempo discreto.

  Las hipótesis fundamentales son:
  - El precio del activo sigue un proceso binomial
  - El subyacente no paga dividendos
  - Los mercados son perfectos (sin costes de transacción ni impuestos)
  - Existe un tipo de interés libre de riesgo constante en el periodo
  - La volatilidad es constante en el tiempo

  Para valorar la opción replicaremos exactamente los mismos flujos a través de una cartera compuesta por H acciones y un préstamo contraído por nominal B aun tipo de interés sin riesgo r_f.

VALORACIÓN DE OPCIONES: MODELO BINOMIAL

Notaremos:

S= precio de la acción

K= precio de ejercicio

r_f= tipo de interés sin riesgo

u y d= coeficientes por los que hay que multiplicar S para obtener el precio al final del periodo

Su= precio de la acción tras la subida

Sd= precio de la acción tras la bajada

c_u= precio de la opción tras la subida

c_d= precio de la opción tras bajada

$$S,c \begin{cases} \nearrow \; Su,\ c_u = \max(0, Su-K) \\ \searrow \; Sd,\ c_d = \max(0, Sd-K) \end{cases}$$

Además sean H= número de acciones de la cartera réplica y B= el nominal del préstamo para comprar dichas acciones.

VALORACIÓN DE OPCIONES: MODELO BINOMIAL

Lo primero que haremos será reproducir el valor intrínseco de la opción dentro de un periodo e igualarlo a los flujos de caja de la cartera réplica:

De donde obtenemos:

$$c_u = Su\,H - (1 + r_f)\,B$$
$$c_d = Sd\,H - (1 + r_f)\,B$$

Si ahora restamos una ecuación de la otra y despejamos el valor de H y B:

$$H = \frac{c_u - c_d}{S\,(u - d)} \qquad B = (Su\,H - c_u) / (1 + r_f)$$

Sustituyendo su valor en la ecuación c= SH-B

$$\mathbf{c} = S\,H - (Su\,H - c_u) / (1 + r_f)$$
$$\mathbf{c}\,(1 + r_f) = S\,H + S\,H\,r_f - Su\,H - c_u$$
$$\mathbf{c}\,(1 + r_f) = S\,H\,(1 + r_f - u) + c_u$$
$$\mathbf{c}\,(1 + r_f) = S\,\frac{c_u - c_d}{S\,(u - d)}(1 + r_f - u) + c_u$$

Denominando: $p = \dfrac{1 + r_f - d}{u - d}$ $\qquad 1 - p = \dfrac{u - (1 + r_f)}{u - d}$

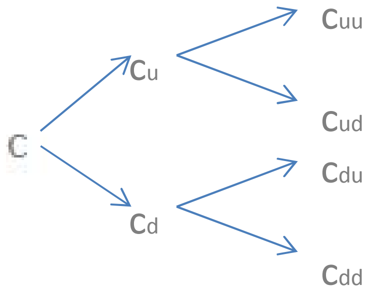
$$\boxed{c = \frac{c_u\,p + c_d\,(1 - p)}{1 + r_f}}$$

VALORACIÓN DE OPCIONES: MODELO BINOMIAL

Concretando, el precio teórico de la opción es igual al valor actual de la media ponderada de los flujos de caja que proporciona.

> A **p** y **1-p** se las conoce como "probabilidades neutrales al riesgo" (de ascenso y de descenso) porque parecen probabilidades pero no lo son. Realmente son los precios tiempo-estado de los dos posibles estados (ascenso-descenso) multiplicados por $1+r_f$. El nombre por el que son conocidas: *probabilidad neutral al riesgo* viene dado por: a) ambas suman la unidad, como las probabilidades subjetivas; b) ambas son positivas, como las probabilidades subjetivas; y, c) cuando se utilizan para estimar el rendimiento esperado de un activo con riesgo hacen que la prima de riesgo desaparezca

Para dos periodos tenemos:



$$C = \frac{p^2 c_{uu} + 2p(1-p)c_{ud} + (1-p)^2 c_{dd}}{r^2}$$

VALORACIÓN DE OPCIONES: MODELO BINOMIAL

Aunque no lo demostraremos, la expresión de la binomial aplicada a varios periodos para la valoración de opciones de tipo europeo es:

$$c = \frac{1}{(1 + r_f)^n} \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} p^k \, (1 - p)^{n-k} \; \text{máx} \left\{ \left(Su^k d^{n-k} \; - \; X \right), \, 0 \right\} \right]$$

Casi todas las variables ya son conocidas a excepción de "n" que indica el número de pasos o iteraciones en los que se descompone el proceso binomial. En resumen, la expresión considera que la opción vale simplemente el valor actual de los flujos de caja esperados a lo largo de un árbol binomial con n pasos, cuyos principales supuestos básicos son:

1º. La distribución de los precios de las acciones es una binomial multiplicativa.
2º. Los multiplicadores **u** y **d** (y, por ende, las varianzas de los rendimientos) son los mismos en todos los períodos.

VALORACIÓN DE OPCIONES: MODELO DE BLACK-SCHOLES

- El modelo de Black-Scholes se basa en modelos estadísticos de probabilidades. El componente probabilístico presente en los modelos no se refiere a las probabilidades subjetivas que los agentes otorguen a eventuales movimientos al alza o a la baja de los precios de los activos, sino al supuesto que se haga sobre la función de distribución de probabilidades que rige las variaciones de los precios del activo subyacente. La variabilidad de los precios del activo es lo que se conoce como volatilidad.
- Las asunciones básicas son:
  - La variación de un activo entre el momento actual y un momento próximo en el tiempo se distribuye según una función Normal.
  - La media de la distribución es μ (rentabilidad esperada) veces el tiempo y la desviación típica es σ (volatilidad) veces la raiz cuadrada del tiempo.

$$Media = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) x (T - t)$$

$$Desviación\ \ típica = \sigma \sqrt{(T - t)}$$

VALORACIÓN DE OPCIONES: MODELO DE BLACK-SCHOLES

- Esto genera dos consecuencias inmediatas:
  - La desviación típica de los rendimientos aumenta en proporción a la raiz cuadrada del tiempo. Ello supones que según pasa el tiempo la magnitud de fluctuación del activo tiende a ser mayor.
  - La tasa esperada de rendimiento varía proporcionalmente al tiempo, pero no a la tasa instantánea de rendimiento. En virtud de ello, se puede afirmar qye la tasa de rendimiento a corto plazo, por si sola, no es un buen estimador de los rendimientos a largo plazo.
- Los principales supuestos que maneja son:
  - Los mercados funcionan sin costes de transacción ni impuestos.
  - El tipo de interés libre de riesgo en conocido y constante a lo largo del tiempo.
  - Los inversores pueden prestar y endeudarse al tipo libre de riesgo.
  - El precio de la acción es una variable aleatoria en el tiempo continuo, cuya tasa de rendimiento instantánea sigue un proceso de media y varianza constantes que da lugar a una distribución lognormal. Variaciones relativas de precio son igualmente probables sobre la media.

VALORACIÓN DE OPCIONES: MODELO DE BLACK-SCHOLES

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) \rightarrow N(\mu t, \sigma^2 t)$$

Así tenemos, en el caso de opciones sobre activos que no paguen dividendos:

$Call = S\,N(d_1) - Ke^{-rT}\,N(d_2)$
$Put = -S\,N(-d_1) + Ke^{-rT}\,N(-d_2)$

S = precio del subyacente

K = strike

σ = volatilidad

r = tipo de interés sin riesgo

T = tiempo al vencimiento de la opción en años

$$d_1 = \frac{Ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

VALORACIÓN DE OPCIONES: MODELO DE BLACK-SCHOLES

Para valorar opciones sobre activos que generan dividendos durante la vida de la opción, se incorpora la rentabilidad por dividendos (q) en términos anualizados como variable relevante. La transformación de los dividendos discretos a rentabilidad por dividendos para su incorporación en el modelo también se recoge a continuación.

$Call = e^{-qT} S\, N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$
$Put = -e^{-qT} S\, N(-d_1) + Ke^{-rT} N(-d_2)$

$$d_1 = \frac{Ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r - q + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$q = \frac{-1}{T}\, x\, Ln\left[1 - \frac{VAN(dividendos)}{S}\right]$$

VALORACIÓN DE OPCIONES: GRIEGAS

Se llama griegas a las sensibilidades de la opción ante movimientos de las distintas variables relevantes en el modelo:

- Delta: Variaciones que tendrá el valor de la opción ante variaciones unitarias del precio del activo subyascente.
- Gamma: Representa las variaciones que tendrá la delta ante variaciones unitarias del activo subyacente.
- Vega: Representa las variaciones que tendrá el valor de la opción ante variaciones de un 1% de la volatilidad implícita.
- Theta: Representa las variaciones que tendrá el valor de la opción como consecuencia del transcurso de un día
- Rho: Representa las variaciones que tendrá el valor de la opción ante variaciones de un 1% en el tipo de interés al vencimiento de la opción.

VALORACIÓN DE OPCIONES: MONTE CARLO

- La simulación de Monte Carlo consiste en generar varias trayectorias, con base en algún proceso estocástico, del precio de un activo financiero. Para un proceso particular de S_t, la simulación encuentra varios valores de S_T (del precio del activo en la fecha de vencimiento del contrato). Para cada valor de S_T se calcula el pago de la opción, se estima un valor medio de esta variable aleatoria y se trae a valor presente usando como tasa de descuento la tasa libre de riesgo. El precio de la opción estimado θ viene dado por la expresión:

$$\hat{\theta} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\exp(-rT) * payoff_j}{m}$$

Donde m es el número de simulaciones. Si se supone que el proceso del precio se rige por la ecuación, $dX = \mu(X,t)dt + \sigma(X,t)dW$, , la simulación de Monte Carlo para encontrar el valor puede basarse en la solución analítica de la ecuación, si esta existe, o en la solución numérica si no existe. A medida que el número de simulaciones m sea mayor, el valor de la opción estimado debe converger a la solución de la fórmula de Black Scholes en el caso de una call europea.

VALORACIÓN DE OPCIONES: EXÓTICAS

- Son opciones que son más complejas que las opciones comúnmente negociadas (*plain vanilla*). Estos productos son negociados normalmente *over-the-counter* (OTC). En muchas casos, para valorarlas se emplea la generación de números aleatorios en base al método estadístico de Montecarlo.

- Ejemplos:
  - Opción asiática: depende de la media del valor del subyacente en un periodo determinado
  - Opción "bermuda" : permite ser ejercida en varios momentos del tiempo
  - Opción con barrera: la opción deja de existir –*knock out*- (o comienza a existir –*knock in*-) cuando el subyacente alcanza un determinado valor.
  - Opción "de estilo cap": (la opción se ejecuta automáticamente cuando el subyacente alcanza un determinado precio.
  - Opción "cesta": se basa en una media ponderada de distintos subyacentes
  - Opción "worst of": se basa en el comportamiento del peor subyacente de una cesta.

VALORACIÓN DE OPCIONES: ESTRUCTURACIÓN

- Depósito a un año con capital garantizado que paga al final del primer trimestre el 5% TAE y a vencimiento el 10% si las tres acciones de la cesta formada por Santander, Iberdrola y Telefónica están por encima de su valor en la fecha de inicio.
  - Qué hace el banco?
    - El banco NUNCA especula contra sus clientes!!!! La banca minorista se "alimenta" de márgenes y comisiones.
    - Diseña el estructurado y se cubre en mercado:

Capital inicial	10.000,00	
Tipo libre de riesgo	4%	
Fecha de inicio	16/02/2013	
Fecha de vencimiento	16/02/2014	
Fecha fin trimestre	16/05/2013	
Tipo fijo trimestre	5%	
Para recuperar el capital a vencimiento	9.615,38	384,62
Pago primer trimestre	120,73	263,89
Margen banco	0,50%	50,00
Disponible para opción	213,89	

ÍNDICE

RIESGO DE MERCADO: VaR

- Se entiende por Riesgo de Mercado, el riesgo de incurrir en pérdidas por el mantenimiento de posiciones en los mercados, como consecuencia de un movimiento adverso de las variables financieras (tipos de interés, tipo de cambio, precios de acciones, precios de comodities) que determinan el valor de mercado de dichas posiciones.

- El VaR aplicado al riesgo de mercado es una estimación estadística para un determinado nivel de confianza de cuanto puede perder una institución que mantiene una posición en el mercado en un periodo de tiempo especificado (horizonte temporal) como consecuencia de las variaciones de los precios de mercado.

  – Ejemplo:

  Sea 3 millones de euros el VAR aun día de una cartera de posiciones con un nivel de confianza del 95%.

  Esto significa que con una probabilidad del 5% (en media una vez cada 20 días) el valor de la cartera caerá más de 3 millones de euros

RIESGO DE MERCADO: VaR

- Componentes de una medición VaR bajo una aproximación delta:

  El VaR de una posición P sujeta al factor de riesgo s puede expresarse de la siguiente manera (aproximación delta):

$$\text{VaR} = P \times \lambda \times \Delta s$$

P → Valor de mercado de la posición

λ → Sensibilidad del valor de mercado de la posición al factor de riesgo s: $\Delta P/\Delta s$

Δs → Movimiento (límite) adverso del factor de riesgo s con un nivel de confianza determinado en un horizonte temporal dado

RIESGO DE MERCADO: VaR

- Si suponemos que la sensibilidad λ es una constante conocida sólo habría que dar respuesta a como estimar el movimiento adverso Δs del factor de riesgo del que dependen el valor de mercado de la posición.

¿Cómo determinar Δs ?

A partir de los resultados observados (distribución muestral histórica) de Δs:

- ✓ Simulación histórica

Asumiendo una **distribución estadística teórica** que caracterice suficientemente bien el comportamiento de Δs:

- ✓ Metodo de la matriz de varianzas-covarianzas
- ✓ Otros (simulación de Monte-Carlo)

RIESGO DE MERCADO: SIMULACIÓN HISTÓRICA

Cálculo	**Supuestos e implicaciones**
Considerar las series históricas $\{s_t\}$, t=-T, 0, de los factores de riesgo para un periodo T suficientemente largo.	Muy transparente. Apenas supuestos: simplemente que las variaciones futuras de los precios de mercado responden a una función de distribución (desconocida) equivalente a la que generó las observaciones históricas.
Obtener para cada momento t la pérdida/beneficio L_t de la cartera correspondiente a la variación en t de los factores de riesgo.	Muy intensivo computacionalmente.
Seleccionar L^* tal que: n° veces $L_t \leq L^*$ = 99% (o 95%)	

RIESGO DE MERCADO: MONTECARLO

Cálculo	Supuestos e implicaciones
Como en simulación histórica pero generando los factores de riesgo a partir de un modelo estadístico predefinido.	Necesidad de especificar el modelo estadístico que genera el comportamiento de los factores de riesgo. Supuesto distribución normal: varianzas y correlaciones. Muy rica en información y especialmente útil para posiciones cuyas variaciones en precio son altamente no lineales con las variaciones de los factores de riesgo. Muy robusto y preciso si el modelo es correcto. Muy intensivo computacionalmente.

RIESGO DE MERCADO: VARIANZAS Y COVARIANZAS

- Hipótesis de partida:
  - Las rentabilidades de los activos que forman la cartera y por tanto la cartera siguen una distribución normal, esto puede no cumplirse cuando existen derivados en la cartera.
  - Las correlaciones y volatilidades estimadas deben ser representativas de las futuras.
  - Las rentabilidades de los activos no se encuentran autocorrelacionadas.
- Partiendo de estos supuestos es posible calcular el VaR de un activo a través de una simple fórmula:

$$VaR = V_M \ \sigma \ Z$$

V_M es el valor de mercado de la acción

σ es la desviación típica de la rentabilidad esperada de la acción ajustada al horizonte temporal deseado

Z número de desviaciones típicas correspondientes al nivel de confianza

RIESGO DE MERCADO: VARIANZAS Y COVARIANZAS

- La pérdida de una cartera de posiciones no es más que la suma de las pérdidas de cada una de las posiciones individuales, por lo que atendiendo a las propiedades de la distribución normal también seguiría esta distribución.

- El VaR de la cartera será:

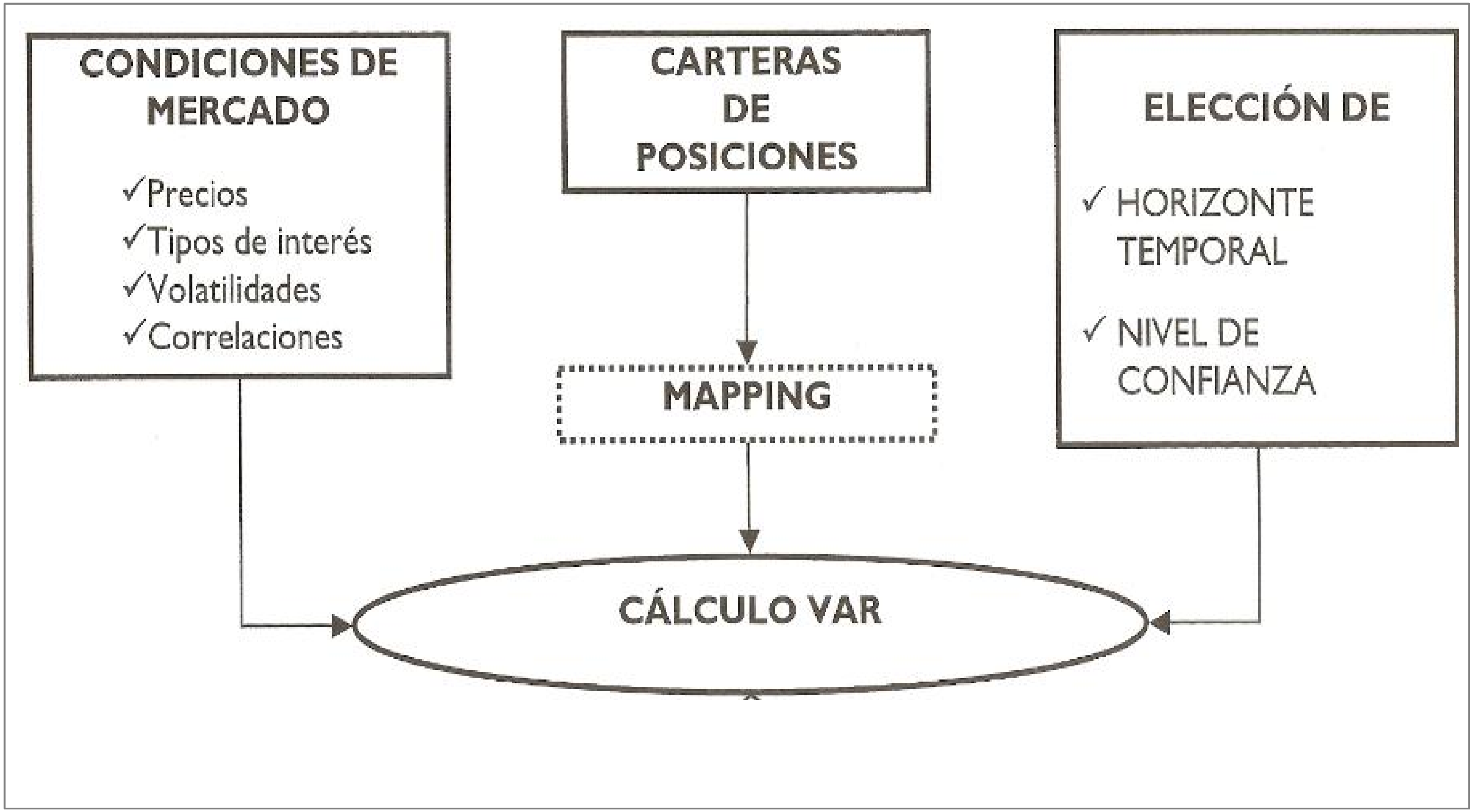
$$VaR_{cartera} = \sqrt{V^T * \rho * V}$$

Donde:

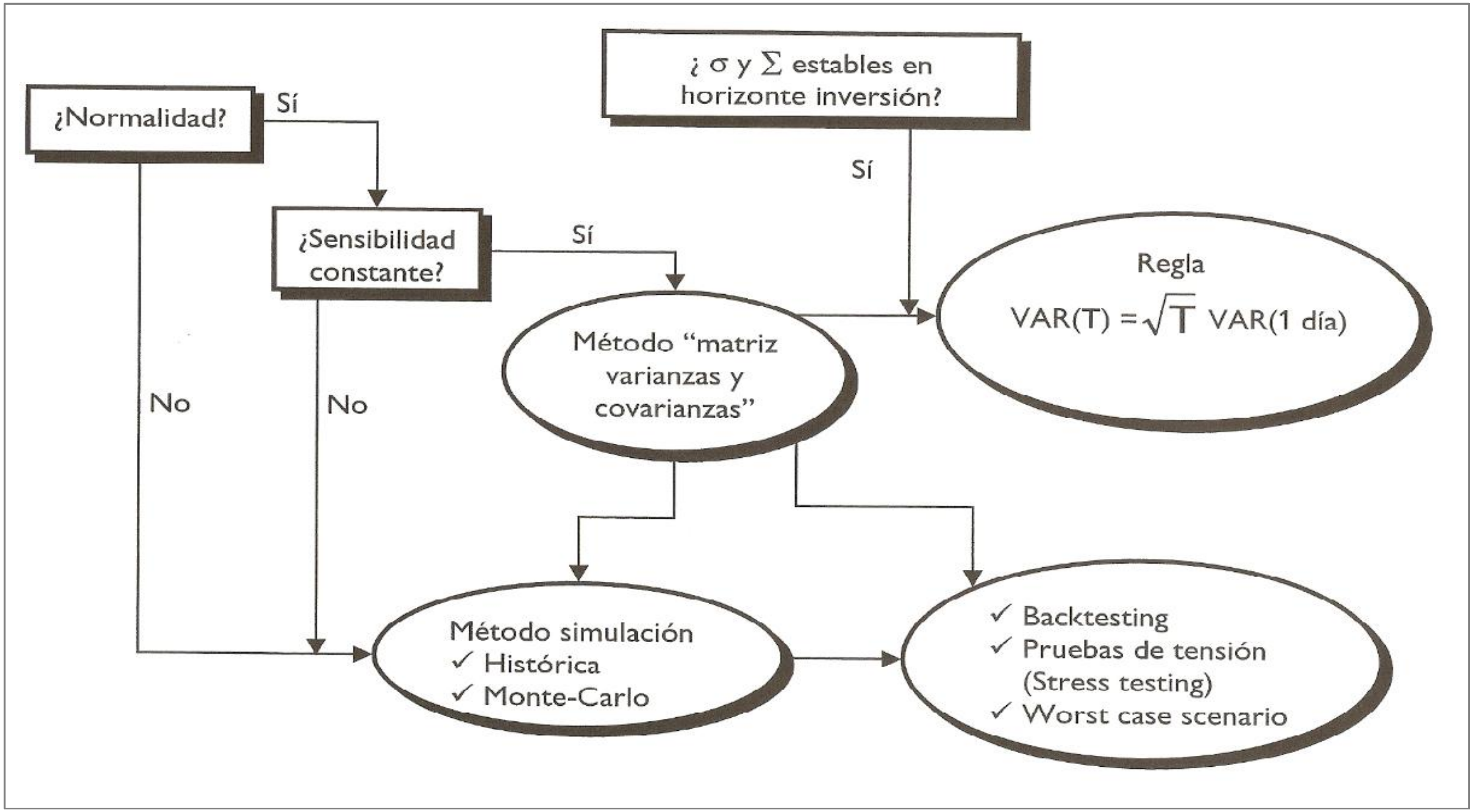
V =[VaR1, VaR2,…, VaRn] vector VaR de los elementos de la cartera y V^T el vector transpuesto de V

ρ = matriz de correlaciones

RIESGO DE MERCADO: DISCUSIÓN



RIESGO DE MERCADO: DISCUSIÓN



Silvia Barco Tato
Directora de Control Financiero y Middle Office en Banco Gallego
sbarco@bancogallego.com
sbarcotato@gmail.com

SGAPEIO
Sociedade Galega para a Promoción da Estatística e da Investigación de Operacións

Banco Gallego

Fundación Barrié